昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年6月1日発行　第52巻6号　毎月1回1日発行

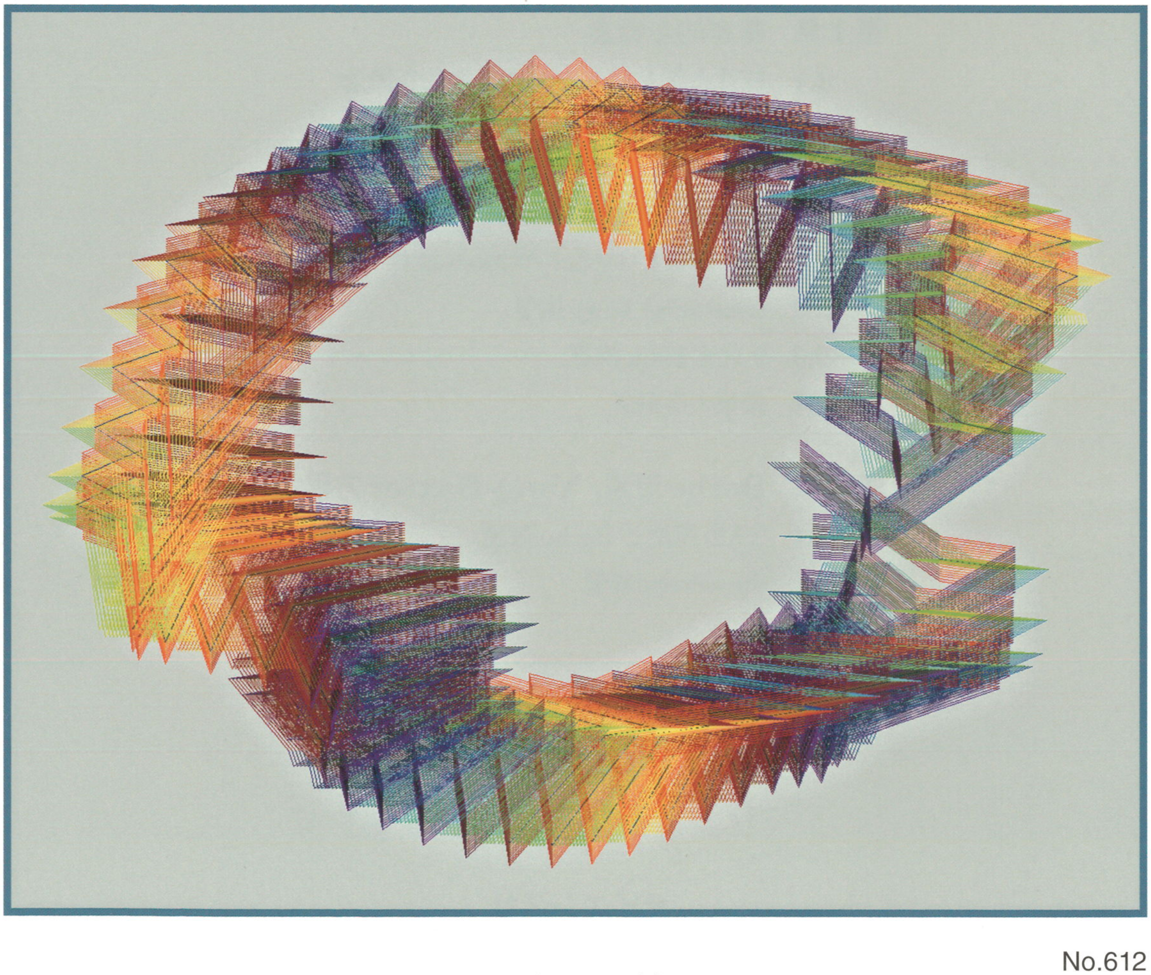
ISSN 0386―2240

数理科学

6
2014

特集

数学と物理における空間概念



No.612

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 612 June 2014

数学と物理における空間概念

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2011 年/6 省略
- 2011 年/7 〈隠れた〉物理法則
- /8 計算が拓く数学と物理の世界
- /9 オイラー
- /10 時空と熱力学
- /11 線形から非線形へ
- /12 物理と仮説
- 2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
- /2 古典のススメ[物理編]
- /3 量子を操る
- /4 量子力学の数学的技法
- /5 解析学と物理学
- /6 面白い発想[物理編]
- /7 数学と物理における格子
- /8 導来圏をめぐって
- /9 ハイゼンベルク
- /10 超弦理論の数理
- /11 物理と数学における厳密解
- /12〈振動する〉物理
- 2013 年/1 表現論の世界
- /2 《量子化》の発想
- /3 光と物理学
- /4 解析学における様々な発想
- /5 次元の作法
- /6 発展する統計力学
- /7 群と物理学
- /8 エネルギーを通して物理学を知る
- /9 ボーア
- /10 分類する《数理科学》
- /11 理論物理と実験物理の交錯
- /12 物理学における存在とは
- 2014 年/1 波と粒子
- /2 利用する物理
- /3 幾何学における様々な発想
- /4 物理現象における表現の多様さ
- /5 数理科学における代数的構造

数理科学臨時別冊一覧

- 13 年/4 無限量子系の物理と数理
- 13 年/7 現代宇宙論講義
- 13 年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
- 13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
- 13 年/12 量子力学ノート
- 14 年/1 量子情報と時空の物理
- 14 年/2 弦理論と行列模型
- 14 年/3 ディラック方程式
- 14 年/4 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
- 14 年/5 パーコレーション理論講義

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

June 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 612

特集／数学と物理における空間概念

空間からみる数学と物理

河野 俊丈

1. 空間認識の歴史

空間概念をどうとらえるかは，幾何学の大きな問題である．紀元前3, 4世紀頃，ユークリッドによって書かれた『原論』では，幾何学の体系が，平面上の「点」と「直線」を出発点として，それらの間に成り立つ公理によって展開されている．ユークリッドについては詳しい生涯は明らかではないが，プトレマイオス1世の時代（紀元前323年–283年）にアレクサンドリアで活動したといわれている．『原論』における幾何学の公理は5つの公準からなっているが，それらには，「直線はどちらの側にも限りなくのばすことができる」などが含まれている．5つの公準の中に「第5公準」とよばれるものがあり，それは，次のように述べられる．

「2直線と交わる1本の直線が同じ側につくる内角の和が2直角よりも小さいならば，2直線をその側にのばせば，どこかで交わる．」

第5公準は平行線の一意存在と同値であるが，他の公準と比べると，複雑な形をしてる．第5公準は他の公準から証明できるのではないかと，長い間考えられていて，証明の試みがなされてきた．ユークリッド幾何学の公理から，三角形の内角の和が180度であることが導かれる．18世紀には，サッケリー，ランベルトらによって，第5公準を否定すると，どのような結論が見出されるかを考察したが，結局，矛盾を導き出すことはできなかった．

1820年代から30年代にかけて，ロバチェフスキーとボヤイによって，第5公準が成立しない幾何学体系が可能であることが示された．これは，三角形の内角の和が180度よりも小さい幾何学であり，このような幾何学は非ユークリッド幾何学とよばれる．

ガウスも，ベッセル宛の書簡などによると，長年にわたって非ユークリッド幾何学の研究を独自に行っていたが，それを公表することはなかった．ガウスは，3つの山の頂を結ぶ三角形の辺の長さと角度を測量し，ユークリッド幾何学の公理が成り立っているかどうかを検証しようとしたといわれている．当然のことながら，当時の測量の精度では，決定的な結論は得られなかったが，幾何学の体系には，ユークリッド幾何学以外のものも存在し，我々がすんでいる空間がどのような幾何学を選んでいるかは，数学的に証明できる問題ではなく，実測してみなければ分からないという認識は，大きな転換であった．

2. 空間を測る

再び，古代ギリシャにもどり，先人たちが我々のすんでいる空間をどのように測っていたかをみてみよう．古代ギリシャでは，大地は球形であるということが，広く受け入れられていたようである．船が遠方から近づくとき，まずマストから見

えること，月食のときに地球の円形の影が観測できることなどが根拠となっていたようである．地球の大きさをはじめて測定したのは紀元前3世紀に生まれたエラトステネスであるといわれている．エラトステネスは，アレクサンドリアの南方数百キロにあるシエネという町で，夏至の日の正午に太陽光線が井戸の底まで照らすことを知り，同時にアレクサンドリアでの太陽の高度を測定することによって，アレクサンドリアとシエネの距離から，地球の周囲の長さを計算した．さらに，エラトステネスは，測定した地球の大きさと，月食，日食を利用して，月の大きさ，地球と月の距離，地球と太陽の距離，太陽の大きさを測定した．どのような測定方法であったかは，読者の方にも想像してみていただきたい．

エラトステネスの測定では，太陽からの平行光線，月食における地球の影などを用いている．現在では，人口衛星から撮った写真をみれば，地球が球形であることが分かる．このような，地球の外からの視点を用いないで，地球上にとどまって，地球が球形であることを認識できるだろうか．球面上で，2点間の最短距離を与えるのは，大円の弧である．大円の弧を辺とする三角形を考えると，その内角の和は180度よりも大きくなる．地球上の3点で，ロープをぴんと張って三角形を作ると，内角の和は180度よりも大きくなるはずである．実際には，地球上で十分に離れた2点をロープで結ぶことは困難なので，2点間を結ぶ飛行機の航路を想像していただきたい．球面上の幾何学では，三角形の内角の和が180度よりも大きくなり，これは，球面上にすんでいる生物から認識できる情報である．ユークリッド幾何学では，直線は無限にのばせることを公理としているので，球面上の幾何学は，そもそも想定していない．その意味では，球面上の幾何学は，第5公準のみを否定した「非ユークリッド幾何学」ではない．

しかしながら，ガウスは，ユークリッド幾何学，非ユークリッド幾何学，球面上の幾何学を含む，さらに本質的な一歩を踏み出すのである．3次元空間内に曲面があると，曲面上の2点の距離をその2点を結ぶ最短の曲線の長さと定義することによって，曲面上の幾何学を展開できる．ガウスは，3次元空間という曲面が入っている空間の視点は捨てて，曲面上の2点間の距離を与える「計量」から出発した幾何学を構築した．これは，曲面の「内在的な幾何学」とよばれる．曲面の曲がり具合を表すガウス曲率は，曲面の3次元空間内への入り方を用いて定義される．しかし，ガウスは，この曲率は，曲面の計量のみから決定されることを証明した．ガウスはこれを theorema egregium（驚異の定理）とよんでいる．

3. リーマン幾何学と相対論

ガウスによって提起された内在的幾何学をさらに一般の次元に拡張したのがリーマンであり，その構想は，1854年のゲッティンゲン大学における就任講演「幾何学の基礎をなす仮定について」で発表される．現在，リーマン多様体とよばれる概念の誕生である．リーマン多様体は，局所的には，n 次元ユークリッド空間と同相で，それに曲線の長さを測ることができるような計量の概念を付加した空間である．リーマン多様体では，一般の次元の幾何学が計量テンソルを出発点として構築される．まず，計量と協調するような，接続，共変微分の概念が定まる．この接続はレビ・チビタ接続とよばれる．次に，共変微分が消えるようなベクトル場として，平行移動が定式化され，速度ベクトル場が平行移動になるような曲線として測地線が定まる．測地線は，ユークリッド幾何学における直線を拡張した概念で，局所的には2点間を最短距離で結ぶ曲線を与える．さらに，接続を用いると，多様体の曲がり具合を表す，曲率の概念が定まる．最も一般的な曲率はリーマン曲率とよばれる4階のテンソルであるが，それを平均して，リッチ曲率，スカラー曲率などが定義される．このように，計量から出発して，曲率の概念が定義される枠組みは，ガウスによる曲面の内在的な幾何学の一般化と考えられる．

アインシュタインは奇跡の年とよばれる1905年

に，論文「運動物体の電気力学について」を発表し，特殊相対論を提唱した．ここでは，光速度不変の原理，および，物理法則は4次元時空におけるローレンツ変換，つまり，ミンコフスキー計量 $-c^2t^2+x^2+y^2+z^2$ を保つ変換で不変であるという考え方が基本的な役割を果たす．特殊相対論の萌芽として，ローレンツの業績がある．ローレンツは1892年の論文「マクスウェルの電磁理論と運動物体への応用」以来，マクスウェルの方程式を研究し，1904年にローレンツ変換の概念に到達する．また，アインシュタインとは独立に，1905年にポアンカレは論文「電子の力学について」を発表し，マクスウェルの方程式がローレンツ変換で不変であることなどを示し，独自に「相対性原理」の概念を得ていることは特筆に値する．

特殊相対論に現れる計量は，いわゆる不定計量であって，ベクトルの大きさの二乗が負になり得る．これはリーマン計量ではないが，不定計量においても，接続，測地線，曲率などの概念を定式化することができる．ここで，測地線は光の経路を表す．アインシュタインは，1913年のグロスマンとの共著論文「一般相対性理論および重力論の草案」において，リーマン幾何学の枠組みを物理的に展開することを構想し，1916年に，論文「一般相対論の基礎」[1]を発表する．そこに現れるアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

と表される．左辺は，計量 $g_{\mu\nu}$，リッチ曲率 $R_{\mu\nu}$，スカラー曲率 R からなり，すべて計量 $g_{\mu\nu}$ とその偏微分で表すことができる．また，右辺の $T_{\mu\nu}$ は，物質（エネルギー）の分布を表し，アインシュタイン方程式においては，物質（エネルギー）が時空の曲がり具合を記述している．

4. 空間の幾何構造

内在的な幾何学の視点に立つと，ある意味で仮想的と考えられていた非ユークリッド幾何学が，負の定曲率の幾何学として自然に認識される視点は19世紀半ばのベルトラミの業績に始まる．その後，クライン，ポアンカレらによって，非ユークリッド幾何学のモデルが構成され，双曲幾何学として飛躍的に発展する．ポアンカレのモデルは半径1の円の内部に計量

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

を入れたものであり，ポアンカレ円板あるいは双曲平面とよばれる．

一方，ポアンカレは1895年から一連の論文 “Analysis situs”[2]を発表し，現在，位相幾何学とよばれる分野の基礎を築く．ここでは，空間を計量の概念から解放して，トポロジーに注目するという視点がもたらされた．

例えば，向き付け可能な閉曲面は，そのトポロジーに注目すると，穴の数を表す種数によって分類される．球面は種数0の曲面，トーラスは種数1の曲面である．また，計量という視点に立つと，球面には曲率が正の一定値をとるような計量，トーラスには曲率が負の一定値をとるような計量を入れることができる．トーラスには平坦な構造，つまり，局所的にはユークリッド平面と合同となるような構造が入る．これをトーラスの局所ユークリッド幾何構造とよぶ．種数2以上の曲面では，曲率が負の一定値をとるような計量が入り，局所的には，双曲平面と合同な幾何構造をもつ．このように，種数2以上の曲面は，双曲幾何構造をもち，曲面の中で，非ユークリッド幾何学に属するものが圧倒的な多数であることが分かる．曲面には，球面，ユークリッド平面，双曲平面の3種類の幾何構造のモデルがあり，三角形の内角の和は，球面では180度より大きく，ユークリッド平面では180度となり，双曲平面では180度より小さくなる．このように，曲面に幾何構造を入れると，曲面上のどの点についても，その近傍は同じ構造をもつ．このような性質を等質性という．さらに，曲面上の一点からどの方向をながめても同じ構造である．この性質は等方性とよばれる．

このような，幾何構造の概念を用いて，3次元多様体の研究に飛躍的な発展をもたらしたのがサー

ストンである．サーストンは，3次元多様体の幾何構造のモデルは8通りに分類されることを証明した[3]．このような幾何構造のモデルから構成される3次元多様体は等質性をもつ．さらに，8種類のモデルのうち，3種類が等方性をもち，それらは，3次元球面，3次元ユークリッド空間，3次元双曲空間である．それぞれ，曲率が正の一定値，0，負の一定値の空間である．サーストンは，3次元多様体が，双曲幾何構造をもつための判定条件を与えた．サーストンの幾何化予想とは，任意の3次元多様体は，うまく分割することによって，それぞれのピースが，上の8種類の幾何構造のいずれかをもつようにできるであろうというものである．

サーストンの幾何化予想は，2003年頃，ペレルマンによって肯定的に解決された．ここでは，リッチフローという，リッチ曲率と，計量の変化率を結びつける微分方程式によって，計量を変化させたときの，漸近挙動を調べるという手法が用いられている．リッチフローはハミルトンによって開発された方法である．幾何化予想の解決を用いて，3次元ポアンカレ予想が解かれた．3次元ポアンカレ予想とは「コンパクトかつ単連結な3次元多様体は3次元球面と同相」と定式化され，ポアンカレによって，"Analysis situs" の補遺で，1904年に提出された．幾何化予想の解決を用いると，球面幾何学以外の場合は幾何構造のモデルはコンパクトではなく，コンパクト多様体はモデル空間の不連続群の作用による軌道空間として得られるので，単連結ではないことからポアンカレ予想が従う．

リーマンの「幾何学の基礎をなす仮定について」には，次の一節がある．

> 「物体がその位置と無関係に存在すると仮定すれば，曲率はいたるところ一定となり，天文学的な測定によって，それが0と異なるということが結論されるかも知れない．」

宇宙空間のあらゆる点に特別な位置はない，つまり，等質性と等方性をもつということを仮定すると，その幾何構造のモデルとして，曲率が正の一定値，0，負の一定値の空間のいずれかをとることができる．4次元時空は，アインシュタインの方程式によって曲がっているが，計量の空間部分のみを取り出すと，上の3つのモデルのいずれの解も存在し得る．このような形のアインシュタイン方程式の解は，ロバートソン・ウォーカー計量とよばれる．ただ，幾何構造のモデルが決まっても，それをモデルにもつ3次元多様体は多く存在する．例えば，曲率が負の一定値をもつ双曲幾何学の場合でもコンパクトな3次元多様体，つまり有限な宇宙空間になり得る．

5. 新しい空間概念を求めて

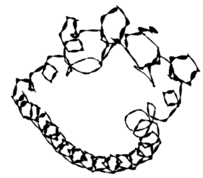
現代の幾何学の研究者は，新しい空間の概念を模索している．リーマンは「幾何学の基礎をなす仮定について」において，「幾何学の仮定が無限小の部分においても成立するか」という問題と関連して，離散多様体の理論の構築の可能性を述べている．離散幾何学はまだ，発展途上の分野である．20世紀後半に発展した，グロタンディークのスキームの理論によって，数論幾何学的な対象を扱うことは，離散幾何学のある意味での成功例であろう．また，空間を，その上の層のなす導来圏でとらえるといった手法は，物理とも関連した，新しい空間概念として発展している．弦理論などの先端的な物理学の研究からは，時空間のコンパクト化に現れるカラビ・ヤウ多様体，ミラー対称性などと関連して，新たな空間の概念がさまざまな形で示唆されている．この特集では，これまでの歴史的な空間概念の発展に加えて，現代の数学と物理にまたがって躍動する新しい空間概念を読み解いていただきたいと思う．

参考文献

1) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys. Ser. 4*, **49** (1916) 769–822.
2) H. Poincaré, Analysis situs, *Journal de l'École Polytechnique*, t. **1** (1895) 1–121.
3) W.P. Thurston, Edited by S. Levy, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Volume 1, Princeton University Press, 1997.

（こうの・としたけ，東京大学大学院数理科学研究科）

特殊相対論と時空の幾何学



加藤　晃史

1. はじめに

Einstein の特殊相対性理論は次の 2 つの原理

- **相対性原理**——物理の基本法則は，どの慣性系でも同じ形をとるように定式化できる．
- **光速度不変の原理**——真空中における光の速さはどの慣性系で測っても同一である．

から出発し，従来の世界観を覆す大発見をもたらした．人々がそれに魅了されるのは，非常に自然な少ない仮定から，論理的帰結として世界の成り立ちを解明してしまったという醍醐味にある．この小文はそれを追体験するガイドブックとして役立てば幸いである．100 年前のスタイルも味わい深いが，せっかく身につけた微積分や線形代数もどんどん活用しよう．

2. 運動法則と幾何学

質点の運動は，各時刻における位置を指定することで完全に記述できる．例えば直線上の運動は，時間 $\mathbb{R}$ を定義域，空間 $\mathbb{R}$ を値域とする関数 (写像) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto f(t)$ のことだと言える．関数の全情報はそのグラフで表される．関数のグラフは，定義域 $\mathbb{R}$ と値域 $\mathbb{R}$ の直積 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ である．我々の場合，運動を表すグラフは時間 (time) と空間 (space) の直積である時空 (space-time) 内の曲線であり，世界線 (world line) と呼ばれる (図 1).

速度はグラフの接線の傾き $\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}$ として定義されるが，これは微分の定義に他ならない．我々は 3 次元の空間に住んでいるので，$\mathbb{R}^3$ 内の運動 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ に関心がある．言い換えれば，運動を知るということは，4 次元時空 $\mathbb{R}^4$ 内の曲線の形を決めるという，幾何学的な問題だと言える．

3. 特殊相対性原理と線形代数

我々は時間や空間などの情報を座標で表すことに慣れきっているが，座標を用いて幾何を代数化する流れは Decartes 以降のもので，幾何と代数はもともと異なる系統に属す数学であった．実際，1000 年以上にわたり，幾何学には定規とコンパスがあれば十分であった．

Einstein は，光速度不変性が Galilei の相対性原理と相容れないことを分析する過程で，超新星爆発のような出来事を表す「時空内の点 (事象，event)」と，「観測者が存在してはじめて決まる座標 (coordinate)」とを分離すべきだという結論に到達したのだろう．座標系を全く知らない幼児でも「まる」と「さんかく」を明確に区別できるように，物理法則も本来は座標抜きで語られるべきなのだ．座標を用いた Newton 力学があまりにも成功したため，人々の頭に「座標＝物理量」という見方がこびりついてしまっていたのである．

座標があくまで副次的な存在にすぎないという考え方は，線形代数で抽象ベクトル空間とその基底を学ぶ際に，非常に明確な形で提示される．$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$

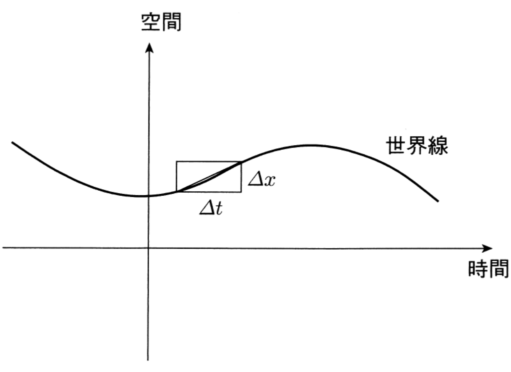


図 1　運動は時空内の世界線で表現される．

がベクトル空間 V の基底であることの定義は,「線形結合をとる写像

$$\psi : \mathbb{R}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

が全射(V を生成する)かつ単射(線形独立)であること」である.これはベクトル $\boldsymbol{v}$ と座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を対応させる装置として完全かつ無駄なく機能する保証書だと言える.

相対性理論で慣性系にいる「観測者」が果たす役割は,固有の時計と物差しを持ち,時空で生じた各事象に対し,その時刻と位置を表す座標に対応させる「装置」である.この意味で,「観測者」は「基底」と同義語だと見なせる.

表 1 特殊相対論と線形代数の辞書.

特殊相対論	線形代数
時空	ベクトル空間
事象	ベクトル
観測者	基底
位置・時刻	座標
$\cdots$	$\cdots$

このように考えると,物理と数学に現れる用語は表 1 のように互いに翻訳可能であることがわかる.冒頭に述べた相対性原理を数学に翻訳すれば,

- 線形代数の基本定理は,基底や座標系の選び方に依らずに述べられるべきである.

ということになる.何だかアタリマエな感じがしないだろうか? それも当然で,「次元の一意性」,「線形写像の階数や次元公式」,「固有値と固有ベクトル」など,講義で学ぶ主要な定理や概念はすべて基底や座標系の選び方に依らずに述べられている.これこそ学問が時代とともに進んでいることの証なのだ.相対性原理がアタリマエに見えるなんて,凄いことだと思わないかい?

4. Lorentz 変換と基底の取替え

空間が 1 次元,時空が 2 次元の場合の Lorentz 変換の形を決定しよう.まず基底=観測者 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ の意味をはっきりさせておこう.$\boldsymbol{a}_1$ は時間方向の単位ベクトル,すなわち観測者自身が 1 単位時間後にいる時空点を表し,$\boldsymbol{a}_2$ は空間方向の単位ベクトル,すなわち観測者から 1 単位距離だけ離れた同時刻の時空点を表すものと約束する.すなわち,

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \tag{1}$$

であるとき,x_1, x_2 は事象 $\boldsymbol{v}$ の観測者 A が自分が持つ時計と物差しで測った時刻 x_1 と位置 x_2 を表す.計算を簡単にするため,長さの単位を光速度が 1 となるように,つまり光が 1 単位時間で進む距離に選んでおく.

定理 1 (i) 座標変換の線形性,(ii) 座標変換の相対性,(iii) 空間反転不変性,(iv) 光速度の不変性を仮定する.このとき,観測者 B が観測者 A から見て速度 v で動くならば,基底 A を B に取り替える行列は

$$P_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

で与えられる.

仮定の意味を説明しつつ,定理を証明しよう.(i) はすでに述べた立場,すなわち「観測者=基底」を再確認しただけである.(ii) は,A から見て速度 v で B への基底の取り替え行列を P_v とするとき,B から見て A は速度 $-v$ で動くので,取り替えの合成 $A \Rightarrow B \Rightarrow A$ について

$$P_{-v}P_v = I, \quad \therefore P_{-v} = (P_v)^{-1}$$

が満たされねばならないという要請である.(iii) は鏡に写った世界でも物理法則は同じであるべきだという信念を表す.空間反転とは,空間方向の基底ベクトルを反転させる操作で,今の場合は

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \mapsto \overline{A} = (\boldsymbol{a}_1, -\boldsymbol{a}_2)$$

という基底の取り替えであり,$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ という行列で表される.このとき,(iii) は次の 2 通りの基底の取替え操作が矛盾しないという要請である.

$$\begin{array}{ccc} A & \xmapsto{P_v} & B \\ F\downarrow & \circlearrowright & \downarrow F \\ \overline{A} & \xmapsto[P_{-v}]{} & \overline{B} \end{array} \qquad \therefore P_vF = FP_{-v}. \tag{3}$$

以上は Galilei 変換の場合でも当てはまる要請であり,相対性理論では (iv) の光速不変の要請が一番本質的である.原点から光速を超えない速度で発射された

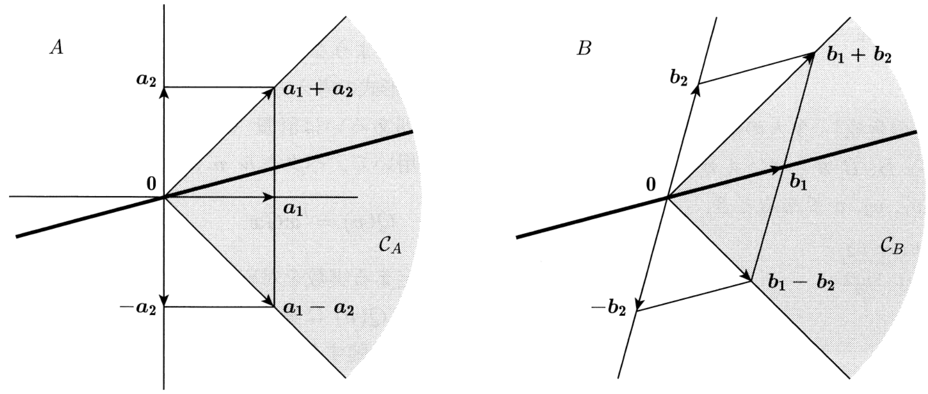


図 2　Lorentz 変換の導出．太線は観測者 B の世界線を表す．

信号が届く時空点の全体を集めてできる図形を光円錐（light cone）と呼ぶ．観測者 A の座標系では，

$$\mathcal{C}_A = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \in M \mid -x_1 \leq x_2 \leq x_1\}$$

となり，観測者 B の座標系では，

$$\mathcal{C}_B = \{y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 \in M \mid -y_1 \leq y_2 \leq y_1\}$$

となる（図 2）．(iv) は，$\mathcal{C}_A$ と $\mathcal{C}_B$ が時空内の図形として一致すべしという条件になる．これを時空 M の「部分集合として一致」と言い換えても良いが，いずれにしろ座標 x_i と y_j の関係自体については何も言及していないことに注意しよう．

(iv) の条件より，$\mathcal{C}_B$ の境界の半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}(\boldsymbol{b}_1 \pm \boldsymbol{b}_2)$ は，$\mathcal{C}_A$ の境界の半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}(\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2)$ と一致しなければならない．従って，ある $\lambda, \mu > 0$ が存在して

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \lambda(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2), \\ \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \mu(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) \end{cases} \tag{4}$$

が成り立つ．これらの和・差をとって整理すると，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\lambda+\mu}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\lambda-\mu}{2}\boldsymbol{a}_2, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\lambda-\mu}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\lambda+\mu}{2}\boldsymbol{a}_2 \tag{6}$$

となり，基底 A を B に取り替える行列が

$$P_v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda-\mu \\ \lambda-\mu & \lambda+\mu \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表されることがわかった．

一方，空間反転不変性 (3) より

$$F = P_v F P_{-v}^{-1} = P_v F P_v \tag{8}$$

なので，その行列式をとって $\det P_v = \pm 1$ がわかる．$P_0 = I$ と v に関する連続性を考えると結局 $\det P_v = \lambda\mu = 1$ でなければならないから，行列 P_v の形を 1 つのパラメータ $\lambda = \mu^{-1}$ を残して決めることができた．

最後に，λ と v の関係を見るため，A から見た B の速度が v であるという条件を幾何的に考えよう．B の世界線（観測者 B 自身の時空内での軌跡）は，座標系 B では $\mathbb{R}\boldsymbol{b}_1$ という直線（座標軸）だが，座標系 A では傾き v の直線，すなわち $\mathbb{R}(\boldsymbol{a}_1 + v\boldsymbol{a}_2)$ で表される．これらは図形として一致すべきだから，

$$\boldsymbol{b}_1 = \gamma(\boldsymbol{a}_1 + v\boldsymbol{a}_2) \tag{9}$$

となる $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在しなければならない．(5) と (9) が両立するためには

$$\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} = v$$

となることが必要で，これを $\lambda\mu = 1$ のもとで解けば，

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}},$$
$$\therefore \frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

となる．これらを (7) に代入すれば (2) を得る．以上で定理が示された．■

$\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2$ や $\boldsymbol{b}_1 \pm \boldsymbol{b}_2$ は，ちょうど Lorentz 変換を「対角化」する基底であることに注意しよう．

今までは光速度が 1 となる基底（単位系）で議論したが，光速度が c の単位系に移るのは単に基底を $(\boldsymbol{a}_1, c\boldsymbol{a}_2)$ のように取り替えるだけであり，

$$P_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ v & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となることが簡単にわかる．光速度 c が無限大となる

極限では $\lim_{c\to\infty} P_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$ となり，Galilei 変換が再現される．

系 1（速度の合成） 3 人の観測者 A, B, C について，A から B, B から C, A から C を見た速度がそれぞれ v_1, v_2, v であるとき，

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{11}$$

が成り立つ．

証明は (10) が基底の取り替えの合成 $P_v = P_{v_1} P_{v_2}$ と両立する条件を調べるだけである．

速度の合成が和ではなく非線形な演算で表されるのを奇異に感じるかもしれないが，速度が接線の傾き（座標そのものではなく，それらの比）で定義される以上，むしろ自然である．$v = v_1 + v_2$ と和になるのは，$c \to \infty$ における近似でしかない．

やや天下りだが，速度 v の代わりに $\lambda = e^u, \mu = e^{-u}$ を満たす rapidity と呼ばれる実数 u を導入しよう．すると，$v = \tanh u$ であり，また Lorentz 変換 P_v は双曲線関数を用いて

$$H_u = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

と書かれる．また速度の合成則は rapidity では

$$H_{u_1+u_2} = H_{u_1} H_{u_2} \tag{12}$$

ときれいに線形化されることに注意しよう．

座標の関係式 $\boldsymbol{x} = P_v \boldsymbol{y}$ と (8) を組み合わせることで，次も容易に示すことができる．

系 2（不変 2 次形式） P, P' を時空内の 2 つの事象とする．ベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PP'}$ の座標成分が A では (x_1, x_2)，B では (y_1, y_2) のとき，次が成立する．

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2. \tag{13}$$

5. 2 次形式と Euclid/Lorentz 幾何学

幾何学（geometry）の語源は大地（geo）を測量する（metry）ことにある．先の幼児の話からも，ベクトルたちには「長さ」や「角度」に相当する量が「基底」や「座標」の選び方によらず先験的に定まっている思うのが自然であろう．相対性理論においても，系 2 の帰結として，(13) という量が，観測者には関係なく，事象 P, P' だけで決まる量であることを見た．

このような立場を公理化したものが，計量線形空間や 2 次形式の考え方である．一般に 2 次形式 Q は，Gram 行列あるいは計量（metric）と呼ばれる対称行列 G を用いて，ベクトル $\boldsymbol{v}$ に，その座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ から

$$Q(\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{x} G \boldsymbol{x}$$

で定まる実数を対応させる．$\boldsymbol{v}$ に関する幾何学的情報は量 $Q(\boldsymbol{v})$ に集約されていると考えるのが「2 次形式 Q に付随する幾何学」である．この幾何学では，基底の取替えや線形変換は，Q という量を不変にするもの（等長変換）に限定する必要があり，その表現行列 P は ${}^tPGP = G$ を満たさねばならない．2 次形式 Q の兄弟分として内積（双線形形式）がある．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ の内積は，それぞれの座標が $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ のとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = {}^t\boldsymbol{x} G \boldsymbol{x}' = {}^t\boldsymbol{x}' G \boldsymbol{x} \tag{14}$$

で定義される．2 次形式と内積の間には

$$Q(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}),$$
$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = \frac{1}{2}\left(Q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') - Q(\boldsymbol{v}) - Q(\boldsymbol{v}')\right)$$

という関係があり，一方を与えれば他方も決まる．

我々が日常的にイメージする Euclid 幾何学は，Euclid 計量 $G_{\mathrm{E}} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式の幾何学である．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さ $||\boldsymbol{v}||$ は

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{Q_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{v})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{15}$$

で定義される．そこでの線形変換は ${}^tAA = I$ を満たす直交行列であり，鏡映や回転を表す．

一方，系 2 は，Minkowski 計量 $G_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で定まる 2 次形式 $Q_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}^t G_{\mathrm{M}} \boldsymbol{x}$ が，Lorentz 変換によって保たれるということを主張している．すなわち，相対性理論は，Q_{M} に付随する幾何——Lorentz 幾何学——の立場で考える必要がある．

ベクトル空間に 2 次形式の情報を付加し，それを不変量とする幾何を考える立場は，「いろいろな幾何」を比較するのに非常に役立つ．表 2 を見てほしい．この表を見ると，Euclid 幾何学と Lorentz 幾何学とは，基礎となる 2 次形式 Q や計量 G が異なることを除けば，ほとんど同じ枠組みで議論できることがわかる．特に Lorentz 変換は，Minkowski 空間における「回転」と位置づけられ，しばしば双曲回転と呼ばれる．

Euclid 空間で，視線に対して垂直に置かれた長さ

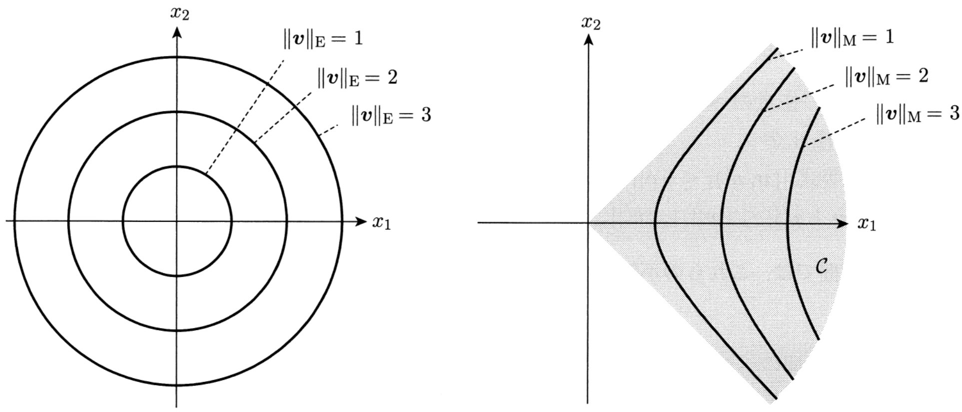


図 3　同じ長さのベクトルの軌跡：Euclid 空間（左），Minkowski 空間（右）.

1 の棒を手前に角 θ だけ傾けると，見かけの長さは $\cos\theta < 1$ 倍に縮むが，このことを誰も不思議だとは思わない．全く同じ理由で，Minkowski 空間の双曲回転で，時間方向に置かれた物差し (=時計) の見かけの長さ (=時間間隔) が $\cosh u > 1$ 倍に伸び，時間がゆっくり進むように見えても，驚いてはいけないのだ．もともと，座標自体に幾何的=物理的な意味はなく，座標は基底と組になって初めて意味を持つのである．

もちろん，Lorentz 幾何学が Euclid 幾何学と何もかも平行に議論できるわけではない．大きく異なる点は，$Q_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{v})$ が常に非負であるのに対し，$Q_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v})$ は正にも負にもなる点である．Euclid 幾何では，任意のベクトル $\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2$ に対し，その長さを

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{E}}=\sqrt{Q_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{v})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \tag{16}$$

で定義できる．しかし Lorentz 幾何では，$Q_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v})\geq 0$ となるベクトル（時間的ベクトル，time-like vector）$\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2$ に対してだけ，

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{M}}=\sqrt{Q_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v})}=\sqrt{x_1^2-x_2^2} \tag{17}$$

が意味を持つ．光円錐 $\mathcal{C}$ 内のベクトル $\boldsymbol{v}$ はこの条件を満たすので，以下では Minkowski 空間で単にベクトルというときは，$\mathcal{C}$ 内のベクトルに限定しよう．

こうして定まるベクトルの長さ $\|\boldsymbol{v}\|$ の意味は何であろうか？ 図 3 は同じ長さを持つベクトルの軌跡を図示したもので，左側が Euclid 幾何，右側が Lorentz 幾何の場合である．同じ曲線上に乗っている点どうしは，等長変換で互いに移りあえることに注意しよう．図左の同心円の半径 $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{E}}$ には，コンパスの足をどれくらい開かねばならないかという物理的な意味がある．

同様に，図右の双曲線たちは，原点から様々な速度（世界線の傾き）で打ち出された観測者たちがそれぞれが持つ時計で測って一定時間後に到達した時空点を表している．つまり $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{M}}$ には，世界線に沿って動いた時計で測った経過時間という物理的な意味がある．これを固有時（proper time）と呼ぶ．固有時 τ は観測者の有無とは無関係に定まり，基底を与えてはじめて決まる座標成分 x_1 とは明確に区別しなければならない．実際，$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{M}}=$ 一定 の図形が直線ではなく双曲線であることからもわかるように，固有時 τ と座標 x_1 の間に大域的な線形関係はない．

表 2　Euclid 幾何 v.s. Lorentz 幾何.

	Euclid 幾何	Lorentz 幾何
計量 G	$G_{\mathrm{E}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$G_{\mathrm{M}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
2 次形式 Q	$Q_{\mathrm{E}}=x_1^2+x_2^2$	$Q_{\mathrm{M}}=x_1^2-x_2^2$
内積	$x_1x_1'+x_2x_2'$	$x_1x_1'-x_2x_2'$
等長条件	${}^tPG_{\mathrm{E}}P=G_{\mathrm{E}}$	${}^tPG_{\mathrm{M}}P=G_{\mathrm{M}}$
ベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さ	$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{E}}=\sqrt{Q_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{v})}$, $\boldsymbol{v}$ は任意	$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{M}}=\sqrt{Q_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v})}$, $\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}\cup-\mathcal{C}$
$\|\ \|$ の意味	距離	固有時
$Q=1$ の軌跡	$x_1^2+x_2^2=1$, 円	$x_1^2-x_2^2=1$, 双曲線
パラメータ表示	$x_1=\cos\theta$, $x_2=\sin\theta$	$x_1=\cosh u$, $x_2=\sinh u$
等長変換の例	$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, 回転	$H_u=\begin{pmatrix}\cosh\theta&\sinh\theta\\\sinh\theta&\cosh\theta\end{pmatrix}$, Lorentz 変換
パラメータ	回転角	rapidity
変換の合成	$R_{\theta_1+\theta_2}=R_{\theta_1}R_{\theta_2}$	$H_{u_1+u_2}=H_{u_1}H_{u_2}$
三角不等式	$\|\|AB\|\|_{\mathrm{E}}+\|\|BC\|\|_{\mathrm{E}}\geq\|\|AC\|\|_{\mathrm{E}}$	$\|\|AB\|\|_{\mathrm{M}}+\|\|BC\|\|_{\mathrm{M}}\leq\|\|AC\|\|_{\mathrm{M}}$

さて，長さが満たす不等式に目を移そう．Euclid 幾何では次の不等式はよく知られている．

定理 2　Euclid 空間の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ に対し，以下の不等式が成り立つ．
(i)　Schwarz の不等式 $|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')| \leq ||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{v}'||$.
(ii)　三角不等式 $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'|| \leq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}'||$.

実は，Minkowski 空間では，これらの不等式の向きが逆転してしまう．

定理 3　Minkowski 空間のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathcal{C}$ に対し，以下の不等式が成り立つ．
(i)　Schwarz の不等式 $|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')| \geq ||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{v}'||$.
(ii)　三角不等式 $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'|| \geq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}'||$.

定理 2 と定理 3 の証明は完全に並行して行える．実際，$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ の座標を (x_1, x_2), (x_1', x_2') とおけば，簡単な計算により

$$||\boldsymbol{v}||^2\,||\boldsymbol{v}'||^2 - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')^2 = \pm \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}^2$$

と表せることがわかる．ただし，$+$ は Euclid, $-$ は Minkowski の場合である．これより (i) が分かった．(ii) が (i) から従うことは練習問題としておこう．

一般に，曲線 γ の長さ $L[\gamma]$ は，その γ を微小区間に分けた折れ線近似の長さの極限として定義される．この折れ線に対して三角不等式を繰り返し適用することにより

定理 4　Euclid 空間において，2 点を結ぶ曲線の長さは，2 点を結ぶ線分の長さより長い．

が証明される．つまり，寄り道すれば必ず遠回りになる．ところが，Minkowski 空間では不等式の向きが逆転するから，全く同様にして，

定理 5　Minkowski 空間では，2 点を結ぶ曲線の長さは，2 点を結ぶ線分の長さより短い．

という定理が証明される．

Minkowski 時空内の曲線（世界線）の長さには，固有時，すなわち世界線に沿って加速度運動する時計で測られる経過時間という物理的な意味がある．時空内の線分は等速直線運動（慣性運動）を表すが，それ以外の曲線は傾き（速度）が変化するので加速度運動を表す．定理 5 は，同じ始点終点の時空の旅では，加速度運動で移動するほうが，慣性運動で移動するよりも時間がゆっくり進むという性質を述べたものである．これはしばしば「双子のパラドックス」，「浦島効果」などと呼ばれるが，決してパラドックスではない．極く短時間で崩壊する素粒子の軌跡が実験装置で現実に観測されているのは，その粒子が光速近くで運動することによって寿命が伸びた効果を入れないと説明できない．

6. 加速度運動と非線形な座標変換

Lorentz 変換は互いに等速直線運動をしている観測者どうしの座標の関係を教えてくれる．では，加速度運動をしている観測者との座標の関係について，我々は何も議論できないのだろうか？ そんなことはない．

加速度運動をしている物体の世界線は，当然ながら曲線で表されることになるが，そもそも加速度とは幾何学的にはどのように捉えるべきだろうか？

Euclid 平面に描かれた曲線について，長さと並んで重要な量は，その曲率（curvature）である．曲率は，曲線に沿って単位距離だけ進んだときに，曲線の接ベクトルの向き θ がどれだけ回転したかを表す $\Delta\theta/\Delta s$ で定義され，自動車の運転で例えるならハンドルを切る角度である．曲率が一定の曲線は円であり，半径 R の円の曲率は $\kappa = 1/R$ で与えられる．この円は，弧長 s をパラメータとして

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa s, \\ x_2 = \dfrac{1}{\kappa}\cos\kappa s \end{cases} \tag{18}$$

と表示できる．

Minkowski 空間内の曲線（世界線）に対しても，曲率を同様に定義することができる．すなわち，世界線に沿って単位固有時間が経過したときに，世界線の接ベクトル（時間方向の単位ベクトル）の向き u がどれだけ双曲回転したかを表す $\Delta u/\Delta\tau$ が曲率 κ である．定曲率の曲線は Minkowski 空間における円，すなわち双曲線

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\kappa}\sinh\kappa\tau, \\ x_2 = \dfrac{1}{\kappa}\cosh\kappa\tau \end{cases} \tag{19}$$

で与えられることになる．ただし，今度は固有時 τ がパラメータとなっている．式 (19) から τ を消去すれば，世界線は

$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{1}{\kappa^2}, \quad \therefore x_2 = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + x_1^2}$$

となり，これを時刻 $x_1 = 0$ の周りで Taylor 展開す

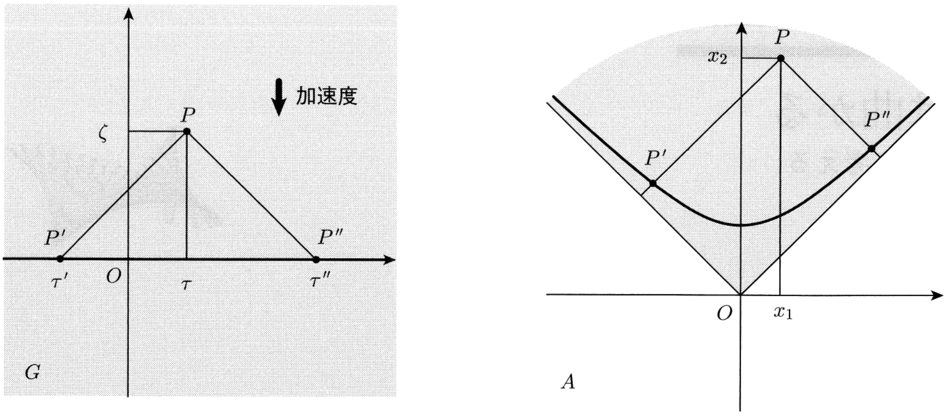


図 4 等加速度運動：太線はともに G の世界線を表す．

れば

$$x_2 = \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \cdots, \quad \therefore \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \kappa + \cdots$$

を得る．つまり，κ はまさしく加速度なのである．

等加速度運動，すなわち世界線 (19) に沿って運動するロケットに乗った観測者 G の立場でものを考えよう．G は常に一定の加速度を感じているが，これは生まれたときからのものだから，自分が曲がった世界線上を動いているという実感はあまりない．地球の重力を感じつつ暮らす我々と同じである．G もまた $(\tau,\zeta) \in \mathbb{R}^2$ で表される座標系を持ち，物理を記述する．τ はもちろん G とともに動く時計を使って測られる固有時である．ζ は G からみた空間座標である．

いま，P を時空内のある事象としよう．G は離れた時空点 P の位置座標 (τ,ζ) をどのように決定するだろうか？ きっと図 4 の左側のような時空を念頭において測定を試みるはずだ．すなわち，G から時刻 τ' に発射されたレーザー光がちょうど P で反射されて，時刻 τ'' に G に戻って来たとしよう．このとき，「光速度一定の原理は当然成り立っているはずだから」，反射という事象 P が起きたのは時刻 $\tau = (\tau' + \tau'')/2$ であり，その空間座標 ζ は，光が往復するのに要した時間の半分 $\zeta = (\tau'' - \tau')/2$ で与えられるはずである．

ところが，この測定を慣性系にいる観測者 A から眺めると，図 4 右のように見える．観測者 A から見た P の座標を (x_1, x_2) としよう．世界線上の点 P', P'' の座標は G のパラメータ表示 (19) を用いて

$$P'\left(\frac{1}{\kappa}\sinh\kappa\tau', \frac{1}{\kappa}\cosh\kappa\tau'\right),$$
$$P''\left(\frac{1}{\kappa}\sinh\kappa\tau'', \frac{1}{\kappa}\cosh\kappa\tau''\right)$$

と表せる．これらから 45 度の傾きで引いた直線（レーザー光の世界線）がちょうど P で交わるという条件を課すと，簡単な計算により

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\kappa}e^{\kappa\zeta}\sinh\kappa\tau, \\ x_2 = \dfrac{1}{\kappa}e^{\kappa\zeta}\cosh\kappa\tau \end{cases} \tag{20}$$

という関係を得る．つまり，観測者 G の座標 (τ,ζ) と観測者 A の座標 (x_1, x_2) は，(20) という「非線形な座標変換」で結ばれるのである！ さらに驚くべきことに，(ζ,τ) を $\mathbb{R}^2$ でくまなく動かしても，(20) 式で対応する点 (x_1, x_2) は $\mathbb{R}^2$ 全体を動かず，図 4 右の影を付けた部分しか覆えない．つまり，A には見えるが G には決して見えない宇宙が存在しているのだ！

果たして観測者 A と観測者 G はどちらの立場が偉いのだろう？ A が慣性系であるということを，A 自身は証明できるだろうか？ 我々は銀河系に対して止まっているのか？ 我々が止まっていて銀河系が動いていると言ってはなぜいけないのだろうか？

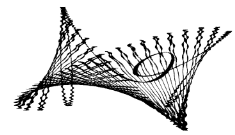
Einstein は，「座標変換の非線形性」と「座標が時空全体を覆えない」という性質は，「時空自体が曲がっている」と考えると極めて自然に説明できることに気がついた．さらに，加速度を重力と同一視することで，「重力」とは「時空の曲がり具合」であるという，誰もが夢想さえしなかった視点に到達したのである．

そう，我々は今まさに一般相対性理論の入り口に立ったばかりだ．しかし残念ながら紙数も尽きてしまった．このガイドブックもここでおしまい．Bon voyage!

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

時空は曲がる

時空の分解を考える



白水 徹也

1. はじめに

一般相対論は友人の数学者であるMarcel Grossmannの協力を得たEinsteinが作り上げた理論であることは有名な話である．一般相対論はRiemann幾何学と偶然か必然か相性がよく，自然な形で定式化される．Riemann幾何学とは一言で言うと曲がった空間を扱う数学である．例えば地球の表面は球面で近似できるが，そのような面上の幾何学である．平坦な空間を扱うEuclid幾何学では平行線が交わることはない．一方で，幾分不正確であるが地球の赤道上から垂直に北半球面に放たれた2本の平行な線は北極で交わる．最初に平行だと思っていた線が先に進むと北極で交わってしまうのである．一般相対論では物質の存在により時空は曲がり，その曲がった時空中を星は“まっすぐ”に運動すると考える．ここで“まっすぐ”という概念を明確にする必要があるが，それは後で行うこととする．一般相対論誕生以前では，太陽の周りを回る惑星は万有引力によって支配されると考えていた．一方で一般相対論では太陽によって曲げられた空間中を惑星は“まっすぐ”に運動していると記述される．天体の運行の記述が大きく変わっている．そして一般相対論の最も著しい予言は宇宙膨張とブラックホールに関するものである．実はあるブラックホールは数学でしばしば考察の対象となる**極小曲面**と密接に関係がある．ブラックホールの形は極小曲面の面積の**第二変分公式**から球面であることが示される．この変分公式を導出する際に（時）空間の分解を行う必要がある．この時空の分解は様々なところで当然のように用いられるが，本稿ではそのいくつかの応用例という観点でブラックホールの形に対する制限，高次元宇宙への応用について見ていくことにしよう．

まずは一般相対論とRiemann幾何学の話から始めて，時空の分解について解説を行う．

2. 一般相対論とRiemann幾何学

重力場中の運動方程式が曲がった空間の距離を考察することで導かれることを示すことで，湾曲した時空の幾何学が重要な道具となることを見てみよう．

まず簡単のために特殊相対論における自由粒子の運動から考えよう．特殊相対論において粒子の運動は時空の2点間の微小距離（世界線素と呼ばれている）

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (d\boldsymbol{x})^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

を持つ**Minkowski時空**上で記述される．ここで$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$とし，同じ添字があれば0から3まで和をとることとする．cは光速で，$x^0 = ct$は長さの次元をもつ時間座標である．粒子の運動方程式を記述するには最小作用の原理を考えるとわかりやすい．通常，粒子の運動は位置$x(t)$と速度$\dot{x}(t)$によって特徴づけられる．tは時間，ドットは

時間微分を表す．粒子の運動は $x, \dot{x}$ の関数ラグランジアン $L(x,\dot{x})$ で特徴付けられ，作用関数は始点と終点についてのその時間積分 $S=\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dtL(x,\dot{x})$ で定義される．ここで粒子の運動について始点と終点を固定したあらゆる経路（それが運動方程式に従うか否かの如何にかかわらず）を考え，経路毎に作用関数を計算することができる．最小作用の原理は，運動方程式を満足する経路に対して作用関数が最小になることを主張する．つまり粒子の運動は作用関数が最小になるように決まっている．例えば，Newton 力学の自由粒子のラグランジアンは $L=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2$ と与えられる．このとき運動方程式は変分 $\delta\boldsymbol{x}$ をとることで

$$\delta S = m\int dt\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{x}} = -m\int dt\delta\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}} \quad (2)$$

となるから，最小であることより（$\delta S=0$）方程式 $m\ddot{\boldsymbol{x}}=0$ を得る．ここで始点と終点は固定しているので $\delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})=\delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})=0$ としている．さて，このラグランジアンは系を特徴付けるスカラー関数であるが，Minkowski 時空において粒子の軌道を特徴付けるスカラー関数は世界線素そのものである．よって，次元を合わせることにより特殊相対論での粒子の作用関数は $S=-mc\int ds$ となることが期待される．実際に粒子の速さが光速よりも十分遅い場合，

$$S \simeq \int dt\Bigl(-mc^2+\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2\Bigr) \quad (3)$$

と展開できるので，Newton 力学の作用関数を再現できている．

Minkowski 時空においてベクトル v^μ はその大きさ $\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ が正，負，ゼロになる 3 つの場合に分類され，それぞれ空間的，時間的，光的ベクトルと呼ばれる．通常の質量をもつ粒子は光速よりも遅く時間的方向に運動し，質量ゼロの粒子は光速で光的方向に運動する．

次に質量 m の重力場中の粒子の運動を考えよう．Newton 力学では運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\nabla\phi \quad (4)$$

で与えられる．また，これに対する重力場中の粒子の作用関数は

$$S=\int dt\Bigl(-mc^2+\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2-m\phi\Bigr) \quad (5)$$

で与えられる．ここで t は時間，ϕ は単位質量あたりの重力場のポテンシャルエネルギーである．実際に変分をとると式 (4) が得られる．運動方程式の導出に定数の mc^2 は影響しないが，重力場がない場合に特殊相対論からの近似結果と一致するようにしている．ここで特殊相対論を真似て少し飛躍になるが

$$S=-mc\int\sqrt{(c^2+2\phi)dt^2-(d\boldsymbol{x})^2} \quad (6)$$

としてみよう．$\left(\frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\right)^2, \frac{\phi}{c^2}\ll 1$ の場合に，式 (5) が導かれることは容易にわかる．そこでここから重力場が存在する時空では世界線素が

$$ds^2=-(c^2+2\phi)dt^2+(d\boldsymbol{x})^2 \quad (7)$$

のように与えられていると考えることができる．Minkowski 時空の場合と比べると時間間隔に重力場の影響が現れていると解釈できる．この観察を積極的に受け入れて，一般的に時空の世界線素が

$$ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (8)$$

となっていると考えることにしよう．$g_{\mu\nu}$ は計量とも計量テンソルとも呼ばれている．時空は複雑に湾曲し，**重力場が幾何学によって記述**されると考えるのである．

物理法則は一般座標変換 $x^\mu\to x'^\mu=x'^\mu(x^\nu)$ の元で共変的であるとする（**一般共変原理**）．よって物理量はこの空間上のスカラー場，ベクトル場，テンソル場によって記述される．例えば，ベクトル場 $v^\mu(x)$*1) は

$$v'^\mu(x')=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}v^\nu(x), \quad (9)$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}(x) \quad (10)$$

と振る舞い，$v_\mu(x):=g_{\mu\nu}v^\nu$*2) は

*1) 反変ベクトルとも呼ばれている．
*2) 共変ベクトルとも呼ばれている．

$$v'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu(x) \qquad (11)$$

に従う．

物理現象を支配する方程式は一般には微分方程式で書かれている．そこで曲がった時空で微分を考える必要がある．ところがベクトル v^ν の偏微分をとったもの $\partial_\mu v^\nu$ は座標変換に対して共変的に振る舞わないことが直ちにわかる（ここで ∂_μ は $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の略記）．これは微分の定義において異なる 2 点の差分（$v^\mu(x+\Delta x) - v^\mu(x)$）を考えていることに起因する．そこで同じ 2 点の差分を考えるために平行移動を導入することにする．x から $x+\Delta x$ までの平行移動によって，ベクトル場は $\tilde{v}^\mu(x+\Delta x) = v^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho} v^\nu(x) \Delta x^\rho$ となったとする．$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ は後で決めることとする．これと $v^\mu(x+\Delta x)$ との差をとることで同一点での差分が可能となる．そしてそれを共変微分として導入することとする．

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v^\nu &:= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v^\nu(x+\Delta x) - \tilde{v}^\nu(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu} \\ &= \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} v^\rho. \end{aligned} \qquad (12)$$

$\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ は (i) $\nabla_\mu v^\nu$ が共変的になっていること，(ii) 平行移動の際にベクトルの大きさが変化しないこと，(iii) 重力が局所的に消せること（**等価原理**）を要請することで*3)

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \quad (13)$$

と決まる．$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ 自身は共変的でないため，局所的にゼロにすることができ，時空の幾何を表す良い量になっていない．そこで導入されるのが Riemann 曲率テンソル $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ である．

$${R_{\mu\nu\rho}}^\sigma v_\sigma := (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v_\rho. \qquad (14)$$

定義から共変的であることは明白である．時空を支配する Einstein 方程式はこの曲率テンソルから作られるスカラー量 $R := R_{\mu\nu\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$ で書かれる重力場の作用関数と物質場の作用関数 S_m の和からなる全作用を計量について変分 $\delta g_{\mu\nu}$ をとることで導かれる．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \qquad (15)$$

ここで $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルで $R_{\mu\nu} := R_{\mu\rho\nu\sigma} g^{\rho\sigma}$ である．

粒子の軌道は作用関数 $S = -mc \int ds$ を変分することで得られる．その結果，軌道の接ベクトルを v^μ とすると

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0 \qquad (16)$$

が得られる．この式は v^μ を軌道に沿って平行移動したとしてもその変化がゼロということを意味している．これは粒子の軌道が“まっすぐ”であることをまさに反映している．$v^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ と書いておくと，上式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \qquad (17)$$

となっている．ここで τ は固有時間で，粒子の軌道に沿った世界線素 ds と $c d\tau = ds$ の関係がある．重力場の時間変動が十分緩やかであり，粒子の速度が光速よりも十分遅い場合，上式の空間成分が近似的に Newton 力学の運動方程式 (4) を再現する．

3. 時空の分解

時空は時間方向と空間方向とがほぼ平等に扱われているため，Einstein 方程式を共変的な形のままで眺めていても時間発展の様子を捉えることは難しい．そこで時間一定面で時空を輪切りにして，その時間発展という見方をするとわかりやすいであろう．この輪切り作業は空間方向にも適用すると便利なことが多いため，ここでは時間・空間方向と特に指定せずに話を進めることにしよう[1]．輪切りにされた断面の単位法線ベクトルを n^μ と書いたとき，$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \epsilon$ を満たす（ϵ は n^μ が時間的な場合は -1，空間的な場合は 1 の値をとる）．断面（以後**スライス**と呼ぼう）を特徴付け

*3) (i) と (iii) より $\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\rho}$ が示される．この事実と (ii) より $g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\tilde{v}^\mu(x+\Delta x)\tilde{v}^\nu(x+\Delta x) = g_{\mu\nu}(x) v^\mu(x) v^\nu(x)$ が成り立つ事実を用いると示すことができる．

る量の一つとして**誘導計量** $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu$ があげられる．これもテンソルであるが，スライスへの射影演算子の役割も果たしている．実際に $h_{\mu\nu}n^\nu = n_\mu - \epsilon^2 n_\nu = 0$ となるため，例えば任意のベクトル v^μ を考えたとき，$h_{\mu\nu}v^\nu$ は n^μ 方向の成分を持たない（$n^\mu h_{\mu\nu}v^\nu = 0$）．もう一つ重要な量として，スライスが全体の時空にどのように横たわっているかを表す**外的曲率** $K_{\mu\nu}$（第二基本形式）である．

$$K_{\mu\nu} = h_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu. \tag{18}$$

これはベクトル n^μ をスライスに沿って平行移動したときの単位法線ベクトルからのずれを表す量である．定義から n^μ 方向の成分は持たない．特に外的曲率のトレース部分 $K = K_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ には体積（面積）の n^μ 方向の増加率を表すことも次のようにわかる．簡単のためにある座標 ξ が存在して計量が $ds^2 = d\xi^2 + g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x)dx^{\hat{\mu}}dx^{\hat{\nu}}$ と書けていたとしよう．ここで添字 $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ は ξ の座標以外のものを表すことにする．すると少し計算した後に $K = \partial_\xi \ln\sqrt{|\det(g_{\hat{\mu}\hat{\nu}})|}$ となることがわかる．$\sqrt{|\det(g_{\hat{\mu}\hat{\nu}})|}$ は微小体積要素であるから，K が確かに体積の変化率を表しており，このことから K が面積の一階変分と直結した量であることがわかる．例えば $K=0$ の面があれば，それは極大（極小）曲面ということになるであろう．

スライスに対して以下の重要な公式が成り立つことが知られている．任意の次元に対して同じ式が成り立つのでここでは D 次元を考えることとする．

（**Gauss** 方程式）

$$^{(D-1)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta h_\rho^\gamma h_\sigma^\delta \, {}^{(D)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \epsilon(K_{\mu\rho}K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma}K_{\nu\rho}). \tag{19}$$

（**Codazzi** 方程式）

$$h_\mu^\rho n^\sigma \, {}^{(D)}R_{\rho\sigma} = D_\rho K_\mu^\rho - D_\mu K. \tag{20}$$

ここで $^{(D-1)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ はスライス上の誘導計量 $h_{\mu\nu}$

から定義される Riemann テンソル，D_μ は $h_{\mu\nu}$ から構成されるスライス上の共変微分，$K = K_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ である．これらの式で $K_{\mu\nu}$ の n^μ 方向の微分が存在しないことに注意する．式 (19) から

$$ {}^{(D-1)}R = h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma(D)}R_{\mu\rho\nu\sigma} + \epsilon(K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}) \qquad (21) $$

も得られる．

また，幾分長い計算の後に

$$ \pounds_n K_{\mu\nu} = 2K_\mu^\rho K_{\nu\rho} - KK_{\mu\nu} - \epsilon N^{-1}D_\mu D_\nu N + \epsilon^{(D-1)}R_{\mu\nu} - \epsilon h_\mu^\rho h_\nu^{\sigma(D)}R_{\rho\sigma} \qquad (22) $$

を得る*4)．ここで N はスライスが $f =$ 一定で指定されている場合に，単位法線ベクトルは $\nabla_\mu f$ に比例するが，その比例係数に対応している（$n_\mu = \epsilon N\nabla_\mu f$）．

以上の式の導出において Einstein 方程式は一切用いていない．ここで D 次元の Einstein 方程式が成り立つとしよう．すると，式 (20), (21), (22) は Ricci テンソル ${}^{(D)}R_{\mu\nu}$ のすべての成分を含んでいること，D 次元の Einstein 方程式からそれらはすべてエネルギー・運動量テンソルで書けることから，それら 3 つの方程式は D 次元 Einstein 方程式と等価である．

時空の分解は様々な場面で重要となる．以下ではブラックホールと高次元宇宙模型に応用してみよう．

4. ブラックホールと極小曲面

ブラックホールの解の一つに Schwarzschild 解が存在し，その計量は

$$ ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). $$

ここで $f(r) = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ である．r, θ, ϕ は平坦空間の極座標に対応している．$f(r) = 0$ となる面はブラックホール表面，すなわち事象の地平面である．その半径 $r = r_{\rm S} = \frac{2GM}{c^2}$ は Schwarzschild 半径と呼ばれている．そこでは時間の刻みを表す dt^2 の前の係数がゼロとなっているため，遠方の観測者から時間が止まっているように見えるところである．さて，この面は時間 $t =$ 一定面上で極小曲面となっている．実際に $r = \rho\left(1 + \frac{r_{\rm S}}{4\rho}\right)^2$ で定義される座標 ρ を用いると時間一定面の計量 dl^2 は

$$ dl^2 = \left(1 + \frac{r_{\rm S}}{4\rho}\right)^4 \left(d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) $$

となる．ここで $r = r_{\rm S}$ は $\rho = \frac{r_{\rm S}}{4\rho}$ に対応するが，この点で $\rho =$ 一定面の面積，$S(\rho) = 4\pi\rho^2\left(1 + \frac{r_{\rm S}}{4\rho}\right)^4$ は $r = r_{\rm S}$ で最小となっている．このことからブラックホールと極小曲面との関連性が生じる．

より一般の動的なブラックホール時空において事象の地平面（の断面）*5) は極小曲面ではなくなる．これは Hawking の面積増大定理*6) からも理解できる．しかし，事象の地平面は無限遠方の観測者から定義されたものであるため大域的な情報が必要となるため実用的ではない．そこでしばしば光の束を考え，その断面積の増減により重力の強さの目安とすることがある．例えば，Minkowski 時空においてはある半径一定面から垂直に外側に放たれた光の面積は時間が経過すると増大することは容易に想像がつくであろう．一方で Schwarzschild 時空の事象の地平面上では面積は変化せず，しかも内部では減少してしまう．例え外向きに放たれた光の束ですらも，重力が著しく強いため収束していくのである．この特徴をおさえるため**膨張** θ を導入しておくのが便利である．

$$ \theta = (g^{\mu\nu} + t^\mu t^\nu - r^\mu r^\nu)\nabla_\mu(t_\nu + r_\nu). \qquad (23) $$

ここで光が放たれると想定される 2 次元面に垂直な時間的方向で未来向きの単位ベクトルを t^μ，t^μ

*4) $\pounds_n$ は n^μ 方向の Lie 微分で，いまの場合具体的には $\pounds_n K_{\mu\nu} = n^\rho\nabla_\rho K_{\mu\nu} + K_{\mu\rho}\nabla_\nu n^\rho + K_{\rho\nu}\nabla_\mu n^\rho$ である．

*5) D 次元時空において事象の地平面は正確には $D-1$ 次元の光的面である．その断面は $D-2$ 次元である．

*6) Einstein 方程式が成り立ち，エネルギー条件を満たし時空がブラックホールの外側で正則ならばブラックホールの事象の地平面の断面の面積が減ることはない．

に直交する空間方向で2次元面に外向きの単位法線ベクトルを r^μ ($g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = -1$, $g_{\mu\nu}r^\mu r^\nu = 1$) とする．また，$g^{\mu\nu}+t^\mu t^\nu - r^\mu r^\nu =: q^{\mu\nu}$ は2次元面上の誘導計量である．$t^\mu + r^\mu$ は光的ベクトルであり，これがある面上で光線束の接線に一致させることができる．そして，先と同様に θ が $t^\mu + r^\mu$ に沿った面積の変化率を表していることを示すことができるので，$\theta = 0$ となる面の有無が強い重力を特徴付けるものとして考えられる*7)．

ここで時間一定面とその中の2次元面という見方をすると，膨張 θ は

$$\theta = K - K_{\mu\nu}r^\mu r^\nu + q^{\mu\nu}\nabla_\mu r_\nu \tag{24}$$

と書き直すことができる．ここで $K_{\mu\nu} = (g_{\mu\rho} + t_\mu t_\rho)\nabla^\rho t_\nu$, $K = g^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$, 右辺第三項は時間一定面上で見たときの2次元面の外的曲率のトレースである．従って，$K_{\mu\nu} = 0$ を満足する時間一定面が存在すれば $\theta = 0$ の2次元面は極小曲面と一致する．この意味で $\theta = 0$ は極小曲面の類似物だと思ってもよい．

$\theta = 0$ の面にはいくつかの制約があることが知られている．式(22)とEinstein方程式から，面積の2階変分公式に対応する式が得られる．

$$(t^\mu - r^\mu)\nabla_\mu\theta|_{\theta=0} \sim -{}^{(2)}R + GT_{+-} + \cdots . \tag{25}$$

ここで $\cdots$ は面上で積分すると非負の量，$t^\mu - r^\mu$ は未来に向いた内向きの光的ベクトル，$T_{+-} = T_{\mu\nu}(t^\mu + r^\mu)(t^\nu - r^\nu)$ である．よって，この式を面上で積分し，$(t^\mu - r^\mu)\nabla_\mu\theta|_{\theta=0} < 0$ であることを用いるとエネルギー条件 ($T_{+-} \geq 0$) を課すことで

$$\int {}^{(2)}R dS > 0 \tag{26}$$

を示すことができる．穴の数を g としたときGauss–Bonnet定理より積分は $8\pi(1-g)$ となるから結局 $g = 0$ (球面) であることがわかる[2]．これは強い制限である．重力場の強い領域の外側の境界は球面であることを意味している．ただしこれは事象の地平面の断面が球面であることを意味しない．一般に事象の地平面の断面は様々な形をしてよいことがわかっており，具体例も議論されている．

以上が時空の分解公式を駆使することでブラックホールの理解に迫る一例である．

5. 高次元宇宙～ブレーンワールド～

次に時空の分解を高次元時空に応用してみよう．超弦理論から我々の宇宙は高次元時空中の薄膜（ブレーン）であることが示唆されている（ブレーンワールド）．これに動機付けられ5次元時空中の4次元の薄膜が簡単なモデルとして考えられている．5次元時空は5次元のEinstein方程式に従うものとすると，式(19)から

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = &-\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu} \\ &+ \kappa^4\pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{27}$$

が得られる[3]．ここでは5次元の計量は $ds^2 = dy^2 + g_{\mu\nu}(y,x)dx^\mu dx^\nu$ と書けているとしている．上式において $g_{\mu\nu}$ はブレーン上の誘導計量，$R_{\mu\nu}$ はそのRiemannテンソルである．導出は割愛するが，式(27)の導出の際にブレーン上の外的曲率が $K_{\mu\nu} = -\frac{\kappa 2\sigma}{6}g_{\mu\nu} - \frac{\kappa^2}{2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}T}{3}\right)$ であることを用いている．さらに

$$\Lambda = \frac{\kappa^2}{2}\left(\Lambda_5 + \frac{\kappa^2\sigma^2}{6}\right), \tag{28}$$

$$8\pi G = \frac{\kappa^4\sigma}{6}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} = &-\frac{1}{4}T_{\mu\alpha}T_\nu{}^\alpha + \frac{1}{12}TT_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}g_{\mu\nu}T^2, \end{aligned} \tag{30}$$

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\mu y\nu y}. \tag{31}$$

ここで ${}^{(5)}C_{\mu y\nu y}$ は5次元Weylテンソルの一部の成分である*8)．$\kappa^2 = 8\pi G_5$ で G_5 は5次元の

*7) $\theta|_T < 0$ を満たすコンパクトな2次元面は捕獲面と呼ばれる．ある時間一定面を考えて，その中で考え得るすべての捕獲面を考えたとき，それらを内側に含む最も外側の面は見かけの地平面と呼ばれている．

*8) WeylテンソルはRiemannテンソルのトレースレス成分である．RiemannテンソルはWeylテンソルとRicciテンソル，スカラーの和で書かれる純粋に重力からの寄与を表している．

重力定数，σ はブレーン張力，$T_{\mu\nu}$ はブレーン上に局在した物質のエネルギー・運動量テンソルである．

ブレーン上で成り立つ上式 (27) の右辺において純粋に高次元の量 $E_{\mu\nu}$ が現れていることに注意する．$\pi_{\mu\nu}$ と合わせて 4 次元 Einstein 方程式への補正項と考えられる．これらの寄与が観測や実験で確認されれば余剰次元あるいは超弦理論の検証へと繋がる．ただし，ここでの模型は幾分単純化されているため観測との単純比較には要注意である．

このように時空の分解を用いただけで，高次元宇宙模型に興味深い洞察を与えることができる．

6. 新たな展開の予感

一般相対論において重力は幾何学で美しく記述される．幾何学でしばしば興味の対象となる極小曲面はブラックホールと密接な関係がある．その際に時空の分解という視点が重要となるが，これを高次元時空に応用することによって高次元宇宙モデルの本質に迫ることもできる．

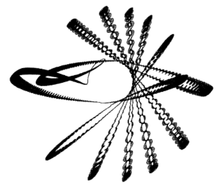
超弦理論において現在も活発に研究が進められている adS/CFT 対応において極小曲面は重要な役割を果たしている可能性があると考えられている．adS/CFT は高次元時空の重力理論が低次元の物質の理論と等価であることを主張する．興味深いことにそこではブラックホールが存在しない場合でも高次元時空の極小曲面が量子もつれと関係あることが最近指摘されている[4)]．時空の真の理解に向けた新たな展開の予感がする．

参考文献

1) 例えば，白水徹也，SGC ライブラリ 90『アインシュタイン方程式』第 4 章（サイエンス社，2012）.
2) より正確な議論は，S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25** (1972) 152.
3) T. Shiromizu, K.-i. Maeda and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
4) 最近のレビューとして T. Takayanagi, *Class. Quant. Grav.* **29**, 153001 (2012).

（しろみず・てつや，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

量子力学とヒルベルト空間



加藤 光裕

1. はじめに

ミクロの世界を記述する量子力学を学び始めると，それまでのニュートン力学でおなじみの概念とは随分様子の違う道具立てに初めは戸惑う．その根底にあるのが，**ヒルベルト空間**である．量子力学では系を記述する**状態**という概念が基本になるからだ．そしてその性質は，確率解釈など量子力学の基本概念と密接に結びついている．

ヒルベルト空間とは，複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ で，その元 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して内積 $(x, y) \in \boldsymbol{C}$ が定義され，

a) $(x, ay + bz) = a(x, y) + b(x, z)$
$(a, b \in \boldsymbol{C},\ z \in \mathcal{H})$.

b) $(x, y) = (y, x)^*$.

c) $(x, x) \geq 0$.

d) $(x, x) = 0$ ならば $x = 0$（零ベクトル）.

e) x と y の距離を $\sqrt{(x - y, x - y)}$ と定めるとき $\mathcal{H}$ は完備である．

という性質をみたすものをいう．

しかし，ひとくちにヒルベルト空間といっても，以下で順に見ていくように，扱う対象を広げるにつれ，少しずつ拡張されていくことがわかる．物理的要請を表現する数学的対象がどのように拡がっていくのかを見ていこう．

2. 古典力学的軌道から量子力学的状態へ

量子力学における状態の概念の起源は，古典力学における軌道に遡ることができる．古典力学では，運動方程式の解が実現される運動を表しており，それを軌道と呼んでいる．例えば，簡単のため一つの力学変数 q で記述される系があったとしよう．時刻 t_0 で，$q(t_0) = x_0$，そして時刻 t_1 で，$q(t_1) = x_1$ という境界条件をみたす運動方程式の解，すなわち時間の関数としての $q(t)$ が求まれば，それは古典力学で実現される運動を表す．

解析力学[*1]の知識を用いてもう少し詳しく見よう．この系のラグランジアンを $L(q, \dot{q})$ とすると，作用汎関数 $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q})dt$ の停留を与える $q(t)$ は，オイラー–ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

をみたす．この微分方程式は，ニュートンの運動方程式の情報を受け継いでいる．

さて，オイラー–ラグランジュ方程式の解 $q(t)$ を作用に代入すると，S はもはや汎関数ではなく，境界条件にのみ依存する関数になる．特に，時刻 t_0 の条件を固定し，t_1 と x_1 の関数とみなして作用関数 $S(t_1, x_1)$ を考えると，これは次のハミルトン–ヤコビ方程式をみたす．

*1） 解析力学に不慣れな読者は，例えば最近の拙稿[1]を参照のこと．

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

ただし，$H(q,p)$ はこの系のハミルトニアンであり，変数 t_1, x_1 を簡単のため単に t, x と書いた．この方程式は $S(t,x)$ に関する偏微分方程式であり，この解はもとの運動方程式の解すなわち軌道の情報を担っている．例えば，ポテンシャル $V(q)$ 中を運動する質量 m の粒子のハミルトニアン $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ に対して，ハミルトン–ヤコビ方程式は，

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x)$$

となる．

ところで，プランク定数 h を 2π で割った $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ を用いて

$$\psi(t,x) = \exp\left(\frac{iS(t,x)}{\hbar}\right) \tag{1}$$

とおいて，ψ に関する方程式に書き直してみると，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2}{\psi} + V(x)\psi \tag{2}$$

と表せることに注意しよう．シュレディンガーは，この方程式の右辺第 1 項を線形化することで，シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V(x)\psi \tag{3}$$

に辿り着いた．もちろんシュレディンガー方程式は，量子力学の方程式であるので，この解 ψ は (1) のように単一の古典軌道と対応しているわけではない．むしろ，経路積分を用いて，

$$\psi(t,x) = \int_{q(t)=x} \mathcal{D}q \, \exp\left(\frac{iS[q]}{\hbar}\right) \tag{4}$$

のように時刻 t において $q(t) = x$ をみたす様々な古典軌道の重ね合わせとして書かれるものである．$\hbar$ を小さくする極限では，作用 $S[q]$ を停留にする古典軌道が最も効くため，(1) に戻り古典的な (2) に帰着するのである．量子力学における状態の概念は，シュレディンガーの波動関数によって表現されるものであるが，これがどのように古典軌道の概念を一般化したものと捉えられるかは，(4) によって明確に表される．

3. 量子力学の枠組みとヒルベルト空間

ひとたびシュレディンガー方程式に到達したならば，その波動関数を取り扱う数学的枠組みを整備する必要がある．状態 ψ_1 から状態 ψ_2 への遷移振幅は，$\int \psi_2^* \psi_1 dx$ によって表されるので，これを内積 (ψ_2, ψ_1) とみなせば，波動関数のなす空間は，内積が定義されたベクトル空間であると考えられる．さらに，状態 ψ にある粒子に対して位置を観測しようとするとき，x から $x + dx$ の微小区間で観測する確率が $|\psi|^2 dx$ に比例するという確率解釈が成立するためには，その総和 $\int |\psi|^2 dx$ が正の有限な値をもつ必要があり，正定値有限ノルムをもつ関数空間を必要とする．

こうして，物理的な要請をみたす関数空間を考えていくと，結局ヒルベルト空間と呼ばれる無限次元ベクトル空間に行き着く．そして，位置座標やエネルギーといった観測可能量は，波動関数に作用する自己双対な線形作用素に対応し，その固有値が実際に観測され得る値となる．状態 ψ にある粒子に対して，自己双対線形作用素 X に対応する観測可能量を測定したとき，その固有値 λ を得る確率は，ϕ_λ を λ に伴う固有関数（すなわち $X\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$）とすると，$|(\phi_\lambda, \psi)|^2$ に比例する．

有限次元のベクトル空間の場合，基底の取り方は一通りではなく，様々な基底の取り方があることを線形代数学で習う．量子力学の状態空間も基底の取り方は一通りではない．座標の関数としての波動関数 $\psi(x)$ は，座標演算子の固有関数による基底を使った表現であり，引数の x はベクトルとしての状態 ψ の添字と捉えられる．そこで，基底に依らない状態の表現としてディラックの記法を導入しよう．すなわち，抽象的に状態を表すベクトルとして $|\psi\rangle$ と書き表し，これをケットベクトルと呼ぶ．一方，内積に関する双対 $(|\chi\rangle, \cdot)$ を $\langle\chi|$ と表し，これをブラベクトルと呼ぶ．従って，$|\chi\rangle$ と $|\psi\rangle$ の内積 $(|\chi\rangle, |\psi\rangle)$ は，より簡明に $\langle\chi|\psi\rangle$

と書き表せる．ブラとケットを合わせることでブラケット ⟨ ⟩ が完成するというディラックの洒落である．この記法を用いると，座標表示の波動関数 $\psi(x)$ は，座標演算子の固有状態 $|x\rangle$ によって，$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ と表現される．

この記法で，基底の取り方に依らない形で代数的に固有値問題を解くことも可能である．例えば，ハミルトニアン

$$H(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$$

で表される調和振動子を考えよう．ここで，粒子の質量やばね定数などは簡単のため 1 とおいた．このハミルトニアンの固有関数は，エルミート多項式などを用いれば，座標表示の関数系が具体的に求まるが，次の演算子を用いて代数的に解くこともできる．

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(p - ix),$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(p + ix).$$

これを用いると，ハミルトニアンは，

$$H = \hbar\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

と書き直せる．a や $a^\dagger$ の代数関係と状態空間の正定値性などから，演算子 $a^\dagger a$ の固有値が非負の整数であることが導け，その結果ハミルトニアンの固有値が $\hbar(n+\frac{1}{2})$ $(n = 0, 1, \cdots)$ と求まるのである．このとき，$a^\dagger a$ の固有値 n を与える固有状態を $|n\rangle$ と表せば，$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ であるが，この状態に対し $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$，また $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ が成立し，それぞれ固有値を 1 減らす，あるいは 1 増やす演算子になっていることがわかる．

ちなみに，基底状態 $|0\rangle$ は，$a|0\rangle = 0$ をみたすが，この式の座標表示を作ると，$(\hbar\frac{\partial}{\partial x} + x)\langle x|0\rangle = 0$ となり，その解は，$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle \propto e^{-\frac{1}{2\hbar}x^2}$ となって，初めから座標表示をとって微分方程式を解いて得られる解と一致する．

4. 第 2 量子化と場の量子論

簡単のため 1 次元空間を考え，そこに N 個の粒子が運動している系を考えると，この系の状態を表す波動関数は，各粒子の位置座標の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ を変数とする N 変数複素関数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ である．そして，ハミルトニアンは，それぞれの座標変数に共役な運動量変数 p_i $(i = 1, \cdots, N)$ を含めた $2N$ 変数に依存した $H_N(x_1, p_1, x_2, p_2, \cdots, x_N, p_N)$ として表される．しかし，粒子の数が変化するような相互作用をもつ系の場合，これではうまく表現できない．粒子数の違うヒルベルト空間全体を扱い，粒子数の増減を表現する方法が必要である．それを実現するのが，**第 2 量子化**である．

第 2 量子化の考え方を説明するために，粒子間の相互作用がなく各粒子がそれぞれ外部ポテンシャルの影響のみ受けながら独立に運動する N 粒子系を考えてみよう．すなわち，ハミルトニアンは各粒子の変数のみに依存する部分の和

$$H_N(x_1, p_1, x_2, p_2, \cdots, x_N, p_N) = \sum_{i=1}^{N} H_1(x_i, p_i)$$

になっている．例えばこのハミルトニアンに対する固有関数は，変数分離法によって各粒子ごとのハミルトニアンに対する固有関数を求めることに帰着される．すなわち，1 体のハミルトニアン H_1 に対する ν 番目の固有値を ϵ_ν，固有関数を $\phi_\nu(x)$，すなわち $H_1\phi_\nu = \epsilon_\nu\phi_\nu$ とすると，積 $\phi_{\nu_1}(x_1)\cdots\phi_{\nu_N}(x_N)$ は，H_N に対する固有値 $\epsilon_{\nu_1} + \cdots + \epsilon_{\nu_N}$ に対する固有関数になっている．実際には同種粒子は区別できないので，ボーズ粒子の場合なら各変数に対して対称化された関数

$$\psi(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{p:\text{置換}} \phi_{\nu_1}(x_{p(1)})\cdots\phi_{\nu_N}(x_{p(N)}) \qquad (5)$$

をとることになる．これを別の表し方で表現することができる．すなわち，1 体問題の各準位に何個の粒子が入っているかを指定すれば，状態は一意に

決まる．それを $|n_1, n_2, \cdots, n_\nu, \cdots\rangle$ というケットベクトルで表そう．ここで，n_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ は，ν 番目の準位に入っているボーズ粒子の数である．これをフォック表示と呼び，このケットベクトルで張られる状態空間をフォック空間とも呼ぶ．

さてここで，前節の調和振動子を思い出そう．演算子 a および $a^\dagger$ は，代数関係 $[a, a^\dagger] = 1$ をみたし，その結果演算子 $a^\dagger a$ は，非負の整数固有値を持っていた．これを今の粒子の個数を表す演算子として応用できないかと考えてみよう．つまり，各準位ごとに調和振動子の演算子 a_ν, $a_\nu^\dagger$ を用意し，それぞれ ν 番目の準位の粒子を一つ減らす演算子と増やす演算子と考えるのである．そうすると，各準位の波動関数 $\phi_\nu(x)$ と今の演算子を用いて，場の演算子 $\hat{\phi}(t, x) = \sum_\nu a_\nu \phi_\nu(x) e^{-i\epsilon_\nu t/\hbar}$, $\hat{\phi}^\dagger(t, x) = \sum_\nu a_\nu^\dagger \phi_\nu^*(x) e^{i\epsilon_\nu t/\hbar}$ を定義すると，この演算子は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(t, x) = H_1 \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}(t, x) \quad (6)$$

という，1 粒子のシュレディンガー方程式と同じ微分方程式をみたす*2)．多体の波動関数は，この演算子を用いて，

$$\begin{aligned} &\psi(x_1, \cdots, x_N) \\ &\propto \langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_N) | n_1, n_2, \cdots \rangle \quad (7) \end{aligned}$$

と表せる（ただし $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(0, x)$ であり，$|0\rangle$ はフォック真空）．しかも，ボーズ粒子としての波動関数の対称化は自動的である．

このように，場の演算子を導入することで，粒子数の違うヒルベルト空間を繋ぐことができ，拡張された状態空間を扱うことができる．場の演算子が 1 粒子のシュレディンガー方程式をみたし，あたかも波動関数を演算子に持ち上げることでこれが実現できているように見なせることから，この処方を「第 2 量子化」と呼んでいる．粒子数が変化するような相互作用は，この場の演算子で書かれた相互作用ハミルトニアンを用いて初めて適切に書き下すことができる．その場合，場の演算子のみたす微分方程式は，もはや線形の方程式ではなくなる．しかし，場の演算子が作用する相手である状態のほうの時間発展を表すシュレディンガー方程式は依然として線形の方程式であることに注意しておこう．これと区別するため前者（場の演算子がみたす方程式）は，場の方程式と呼ばれる．場の方程式を，オイラー–ラグランジュ方程式として導く場のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L} = \hat{\phi}^\dagger i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi} - \hat{\phi}^\dagger H_1 \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} - g \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \hat{\phi}$$

などと構成できる（結合定数 g に比例する非線形項が相互作用の例）．g の項がなければこれから導かれる場の方程式は (6) である．これから場の演算子に対する正準共役運動量 $\hat{\pi} = i\hbar \hat{\phi}^\dagger$ を定義し，通常のルジャンドル変換によって得られるハミルトニアン（これは H_1 や H_N とは違うもの）を $\boldsymbol{H}$ と書けば，

$$\boldsymbol{H} = \int dx \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{\pi} H_1 \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} - \frac{g}{\hbar^2} \hat{\pi} \hat{\pi} \hat{\phi} \hat{\phi} \right]$$

となり，場の理論のシュレディンガー方程式は，状態を $|\Psi(t)\rangle$ として，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \boldsymbol{H} |\Psi(t)\rangle$$

と得られるのである．これは，(6) に形は似ているが，粒子数を変える相互作用を含んだものだということに注意しよう．ちなみに相対論的ボーズ粒子の場の方程式は，相互作用がない場合でもシュレディンガー方程式の形は（当然ながら）していない．

5. ゲージ理論と不定計量ベクトル空間

ここまでの話では，正定値計量（零ベクトル以外の任意のベクトルについて自分自身との内積が正の実数）をもつヒルベルト空間を考えてきた．相対論的場の理論，特にスピンが 1 以上の粒子に対する相対論的場の量子論では，明白な共変性（ローレンツ変換の下で理論が不変であることを明白に

---

*2) 演算子の時間発展を表す方程式であるので，これはあくまでハイゼンベルク方程式である．たまたま方程式の形がシュレディンガー方程式と同じであるということ．

示す理論形式）を保つことは正定値計量の範囲では難しい．最もありふれたスピン 1 の場の理論である電磁場（光子の場）の理論もそうである．その理由は，スピンが 1 以上では，場の演算子自体が時空の添字をもつ（例えば，電磁場の場合，ポテンシャルの場 A_μ が基本的な場であるが，時空の添字 μ (=0,1,2,3) をもつ）．そして，ミンコフスキー時空の計量は，$\mu = 0$ 方向（時間の方向）と $\mu = 1, 2, 3$ 方向（空間の方向）とで符号が逆になっていることが原因となり，場を量子化して状態空間をつくるとノルムが必ずしも正の実数の状態のみで閉じていないことがわかるのである．正定値でない，つまり不定計量のベクトル空間を用いる必要が生じるのである．先に述べたように，ヒルベルト空間の正定値性は，波動関数の確率解釈を保証する道具立てであったので，このままでは困ってしまう．状態ノルムの正定値性およびそれが時間発展しても確率の総和が保存される性質を**ユニタリー性**と呼ぶが，相対論的共変性と量子力学のユニタリー性は単純には両立できない．

幸いなことに，電磁場も含めスピン 1 以上の場の理論は，**ゲージ不変性**と呼ばれる局所的対称性を持つ．これは，場の自由度のうちいくつかは非物理的で我々の観測にかからないことを意味している．すなわち，正でないノルムをもつ状態がすべてこの観測にかからない非物理的な自由度に押込められ，物理的状態の確率の総和が保存するようにできるなら，不定計量ベクトル空間を使うこととユニタリー性は矛盾せずに両立できるはずである．これを実際に見事に実現してくれるのが，BRS 対称性である（ベッキ，ルーエ，ストラの 3 人の頭文字に由来する）．

BRS 対称性とは，量子化の手続きによって壊されたゲージ対称性の代わりに量子論で実現する大域的対称性で，保存荷電である BRS 荷電 Q_B が付随する．物理的状態は，九後–小嶋の補助条件 $Q_\mathrm{B}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ をみたす状態として定義する．状態空間全体は不定計量であるが，物理的状態で張られる部分空間 $\mathcal{V}_\mathrm{phys}$ には負計量状態が含まれないこと，Q_B が保存することから $\mathcal{V}_\mathrm{phys}$ は時間発

展に対して不変であり，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ 上でのユニタリー性が成立することが，適切な仮定の下で示せるのである．

ここで注意すべきは，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ において，零ノルムをもつ状態は零ベクトルとは限らない点である．従って，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ は通常の意味でのヒルベルト空間の公理をみたしていない．ゼロノルム状態のなす部分空間を $\mathcal{V}_0$ と書くと，商 $\mathcal{H} = \mathcal{V}_{\rm phys}/\mathcal{V}_0$ をとって初めてヒルベルト空間となる．

6. 非可換空間へ

ここまで，量子論における状態空間を見てきた．粒子の量子力学におけるヒルベルト空間から，多体系や場の理論における拡大されたヒルベルト空間，そして相対論的な場の理論における不定計量空間と物理的部分空間，というようにヒルベルト空間の概念を拡張してきた．しかし，ヒルベルト空間は，数学的にはユークリッド空間のような身近な距離空間の拡張と捉えることもできるわけで，その幾何学がどのように理解できるのかは純粋に数学的に面白い問題である．実際，コンヌによる**非可換幾何学**は，その定式化の一例である．基本的アイデアは，通常のリーマン幾何学の諸性質をその上で定義される関数環（可換環）の性質から再構成できるというゲルファント–ナイマルクの定理を拡張し，非可換環を考えることで拡張された幾何学を定義しようとするものである．そこでの基本的道具立てとして，ヒルベルト空間とその上で定義されたディラック演算子などが使われている．

この非可換幾何学は物理学の側から見ても意味がある可能性がある．時空そのものの動力学を取り扱う重力の量子論を矛盾無く構成することは，理論物理学における大問題であるが，時空をリーマン幾何学的に捉える一般相対性理論を単純に量子化したのでは，うまくいかない．一方，量子重力を与える無矛盾な理論の最有力候補は超弦理論であるが，そこでは様々な局面で，非可換時空的様相が顔を出している．量子力学と相性の良いヒルベルト空間に基づく非可換幾何学が，古典重力の記述の要であったリーマン幾何学に替わって，量子重力を記述する要になる可能性は十分にあり得ると考えられるが，今のところまだ良くわかっていない．個人的には，正定値ヒルベルト空間はユークリッド的になるのに対して，平坦なミンコフスキー空間も含めた所謂ローレンツ的空間を扱うには，コンヌの枠組みをさらに拡張し前節の不定計量空間を用いることが重要だろうと考えている．

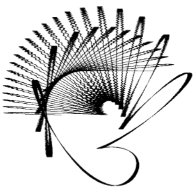
いずれにしても，数学的概念と物理学的概念の発展が相互作用しながら進むことで，自然界を記述する究極の法則が明らかになっていくと期待している．

参考文献

1) 加藤光裕，「ニュートン力学と解析力学」，数理科学 2014 年 4 月号（サイエンス社）．

（かとう・みつひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

古典力学からシンプレクティック幾何学へ



今野　宏

1. はじめに

古典力学では，点粒子の運動は，初期時刻での位置と運動量が与えられていれば，ニュートンの運動方程式によって完全に決定されてしまいます．そして，ニュートンの運動方程式を異なる視点から書き直すと正準方程式と呼ばれる方程式系が得られます．ところが，この記述の仕方の変更がもたらしたものは驚くほど豊かなものでした．

まず，正準方程式は正準量子化に直接つながるものなので，物理学における意義は計り知れないほど大きなものがあります．また，数学と物理との関わりという視点から見ると，正準方程式の発見は，シンプレクティック幾何の誕生を意味します．そして長い間，シンプレクテイック幾何は幾何というよりはむしろ微分方程式に関連してゆるやかですが着実に発展してきました．けれども，1980年頃から，場の量子論と幾何学が結び付いて，飛躍的な発展を遂げました．その際，シンプレクティック幾何学の考え方が重要な役割を果たしています．そして，シンプレクティック幾何は，物理学，数学の両方から多くの影響を受け，現在も活発に研究されています．これから，物理学と幾何学との関わりをシンプレクティック幾何の視点から覗いてみましょう．

2. ニュートンの運動方程式から正準方程式へ

空間 N 内を運動する質量 m の点粒子を考えてみましょう．$U\colon N \to \mathbb{R}$ をポテンシャルとするとき，点粒子の時刻 t での位置 $\boldsymbol{x}(t) \in N$ は次のニュートンの運動方程式を満たします．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}(t) = -(\operatorname{grad} U)_{\boldsymbol{x}(t)}. \tag{1}$$

初期状態 $\boldsymbol{x}(0) \in N$, $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(0) \in T_{\boldsymbol{x}(0)}N$ が与えられると，この微分方程式によって，すべての時刻 $t > 0$ における位置 $\boldsymbol{x}(t)$ が決定され，これにより点粒子の運動が完全に記述できることになります．これがニュートン力学の基本的な考え方です．

ニュートンの運動方程式の解は，次のような変分問題の停留曲線として特徴付けられます．N の接束 TN とは，N の点 $\boldsymbol{x}$ とその点における接ベクトル $\boldsymbol{v}$ の組全体のなす空間のことです．このとき，**ラグランジュ関数** $L\colon TN \to \mathbb{R}$ を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

と定めましょう．$\Omega(N, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を始点が $\boldsymbol{x}_1 \in N$，終点が $\boldsymbol{x}_2 \in N$ である N 内のなめらかな曲線 $c\colon [a, b] \to N$ 全体のなす空間としましょう．このとき，**作用積分** $S\colon \Omega(N, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \to \mathbb{R}$ を次のように定めます．

$$S(c) = \int_a^b L\left(c(t), \frac{dc}{dt}(t)\right) dt. \tag{3}$$

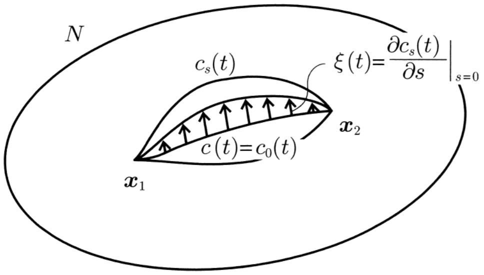


図 1

このとき，運動方程式の解は作用積分 S の最小値を与える，というのが**最小作用の原理**です．曲線の族 $\{c_s(t)\in\Omega(N,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\}_{s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ を考え，$c(t)=c_0(t)$ とします．すなわち，端点 $\boldsymbol{x}_1=c(a),\boldsymbol{x}_2=c(b)$ を固定したまま曲線 $c(t)$ を連続に変形したものが $\{c_s(t)\}_{s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ です（図 1）．

以下，簡単のため，$N=\mathbb{R}^2$ としましょう．すると，$TN=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ となり，(x_1,x_2,v_1,v_2) を座標とします．曲線の族 $\{c_s(t)\}_{s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ に対して，その変分 $\xi(t)=\frac{\partial c_s(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}$ は曲線 $c(t)=c_0(t)$ に沿ったベクトル場ですが，その x_i-方向成分を $\xi_i(t)=\frac{\partial x_i(c_s(t))}{\partial s}\Big|_{s=0}$ と表します．このとき，

$$\frac{dS(c_s)}{ds}\Big|_{s=0}=\int_a^b\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\Big)\xi_i dt \tag{4}$$

となります．したがって，$c(t)$ が作用積分 S の停留曲線であることは，次の微分方程式をみたすことと同値になります．

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(c(t),\frac{dc}{dt}(t)\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\left(c(t),\frac{dc}{dt}(t)\right). \tag{5}$$

この微分方程式を**オイラー・ラグランジュ方程式**といい，ニュートンの運動方程式と同値です．

N の余接束 T^*N とは，N の点 $\boldsymbol{q}$ とその点における余接ベクトル $\boldsymbol{p}$ の組全体のなす空間のことです．今，$N=\mathbb{R}^2$ としていたので，$T^*N=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ となり，(q_1,q_2,p_1,p_2) を座標とします．写像 $\Phi\colon TN\to T^*N$ を

$$q_i=x_i,\quad p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i} \tag{6}$$

により定めます．ラグランジュ関数 L を (2) により定めるとき，$p_i=mv_i$ となり，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ は運動量となります．また，Φ は 1 対 1 写像になることがわかります．T^*N の点 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は位置と運動量の組です．時刻を固定したときの点粒子の物理的状態は位置と運動量により記述されます．このように T^*N は，時刻を固定したときの点粒子の物理的状態全体からなる空間で，**相空間**といいます．一方，N を**配位空間**といいます．以上より，N 内の点粒子の運動を記述するためには，任意の時刻 $t>0$ における点粒子の物理的状態 $(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ を決定すればよいことになります．すなわち，配位空間 N 内の点粒子の運動は相空間 T^*N 内の曲線として表されます．

次に，この相空間内の曲線を表す微分方程式を考えてみましょう．**ハミルトン関数** $H\colon T^*N\to\mathbb{R}$ を次のように定めます．

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=p_1v_1+p_2v_2-L(\Phi^{-1}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})). \tag{7}$$

ここで，$v_i=v_i(\Phi^{-1}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}))$ $(i=1,2)$ です．このとき，オイラー・ラグランジュ方程式 (5) は次の微分方程式系と同値になります．

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8}$$

これを**正準方程式**といい，点粒子の運動はこの方程式の解として記述されます．

(8) では具体的に正準方程式を書き下しましたが，この方程式の幾何学的な意味を考えてみましょう．相空間 T^*N 上には**シンプレクティック構造**と呼ばれる次のような 2 次微分形式

$$\omega=dp_1\wedge dq_1+dp_2\wedge dq_2 \tag{9}$$

があります．2 次微分形式 ω は 2 次の交代テンソルですが，これにより T^*N 上の 2 つのベクトル場 X,Y に対して，関数 $\omega(X,Y)\colon T^*N\to\mathbb{R}$ が得られます．すなわち次が成り立ちます．

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i},\frac{\partial}{\partial p_j}\right)=\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i},\frac{\partial}{\partial q_j}\right)=0,$$
$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i},\frac{\partial}{\partial q_j}\right)=-\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i},\frac{\partial}{\partial p_j}\right)=\delta_{ij}.$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタです．したがって $\omega(X,\cdot)$ により，T^*N 上のベクトル場 Y に対して，関数 $\omega(X,Y)\colon T^*N \to \mathbb{R}$ が得られるので，$\omega(X,\cdot)$ は1次微分形式となります．一方，ハミルトン関数 $H\colon T^*N \to \mathbb{R}$ の微分

$$dH = \sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\Big) \qquad (10)$$

は1次微分形式です．このとき，T^*N 上のベクトル場 X_H で

$$dH = -\omega(X_H,\cdot) \qquad (11)$$

をみたすものがただ一つ定まります．この X_H をハミルトン関数 H の定める**ハミルトンベクトル場**といい，具体的には次で与えられます．

$$X_H = \sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big). \qquad (12)$$

$\gamma(t) = (\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ と表すとき，正準方程式は

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = (X_H)_{\gamma(t)} \qquad (13)$$

と表されます．(13) をみたす曲線 $\gamma(t)$ を，ベクトル場 X_H の積分曲線といいます．

さらに，関数 $f_i\colon T^*N \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ に対して，**ポアソン括弧積** $\{f_1,f_2\}\colon T^*N \to \mathbb{R}$ を

$$\{f_1,f_2\} = X_{f_1}f_2 = \omega(X_{f_1},X_{f_2}) \qquad (14)$$

により定めます．ただし，ベクトル場 X による関数 f の微分を Xf により表します．Xf は M 上の関数になります．T^*N 上の関数 f は観測量ですが，観測量の時間発展 $f\circ\gamma(t)$ は

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = (X_H f)\circ\gamma = \{H,f\}\circ\gamma \qquad (15)$$

を満たします．

以上まとめると，(1) 相空間 T^*N はシンプレクティック構造 ω をもつ，(2) 配位空間 N 内の点粒子の運動は，相空間 T^*N 上のハミルトン関数 H の定めるハミルトンベクトル場 X_H の積分曲線 $\gamma(t)$ として表される，(3) 観測量 f の時間発展は $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = \{H,f\}\circ\gamma$ により記述される，ということになります．

3. シンプレクティック多様体

空間 M の各点に対して，その点の周りが n 個の座標により表されるとき，M を n 次元**多様体**といいます．例えば，円周は1次元多様体，球やドーナツの表面は2次元多様体です．多様体の内在的な性質として，トポロジーがあげられます．トポロジーとは，大域的な「形」，あるいは，連続変形をしても不変な性質のことです．さらに，多様体上に幾何構造を定めることにより，多様体の幾何をより豊かにすることができます．幾何構造の典型的な例として，**リーマン計量**，**複素構造**，**シンプレクティック構造**などがあります．リーマン計量とは，多様体の各点の接空間における内積のことで，これにより多様体上の2点間の距離が定まります．複素構造は，多様体上の（複素関数論の意味での）正則関数を定める構造のことです．シンプレクティック構造とは，多様体上の非退化な2次閉微分形式のことです．これらの幾何構造はいずれも多様体上のテンソル場として表されます．多様体上にこれらの幾何構造を一つ固定したとき，それぞれ**リーマン多様体**，**複素多様体**，**シンプレクティック多様体**といいます．

ところで，多くの物理系は対称性をもっています．前節では，古典力学の相空間がシンプレクティック多様体 (M,ω) となることを説明しましたが，対称性は次のように定式化されます．ユニタリ群 $U(n)$，直交群 $O(n)$ などのように群であると同時に多様体でもあるものを**リー群**といいます．リー群 G が多様体 M に作用するとは，G の任意の元 g に対して写像 $R_g\colon M \to M$ が定まり，次の性質を満たすことをいいます．

(1) $R_g(x) = xg$ と表すとき，$(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$ が成り立つ．

(2) G の単位元を e とするとき，$R_e\colon M \to M$ は恒等写像である．

$xG = \{xg \mid g \in G\}$ を x を通る **G-軌道**といい

ます．

物理系の対称性とは，その相空間 (M,ω) にリー群 G がシンプレクティック構造を保って作用し，さらにハミルトン関数 $H\colon M\to\mathbb{R}$ が G の作用で不変であることと定式化されます．G の単位元における接空間 $\mathfrak{g}$ は**リー環**と呼ばれる代数構造をもちます．また G は $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ にも作用します．多くの場合に G の作用と整合的で次の性質をもつ写像 $\mu\colon M\to\mathfrak{g}^*$ が存在します．

$$\omega(X^{\#},\cdot)=-d\langle\mu(\cdot),X\rangle. \tag{16}$$

ただし $X^{\#}$ とは $X\in\mathfrak{g}$ が生成する M 上のベクトル場です．また，$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ は自然なペアリングで，(16) は M 上の関数 $\langle\mu(\cdot),X\rangle$ の定めるハミルトンベクトル場が $X^{\#}$ であることを意味しています．写像 $\mu\colon M\to\mathfrak{g}^*$ を**モーメント写像**といいます．

このとき，関数 $\mu_X=\langle\mu(\cdot),X\rangle$ は保存量になります．すなわち，系の時間発展に関して不変になります．実際，ハミルトン関数 H は G の作用で不変ですから，$X^{\#}$ による H の微分 $X^{\#}H$ は 0 になります．さらに，$\gamma(t)$ を H の定めるハミルトンベクトル場 X_H の積分曲線とするとき，$X_{\mu_X}=X^{\#}$ に注意すると，次が成り立つことがわかります．

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\mu_X\circ\gamma)=\{H,\mu_X\}\circ\gamma\\&=-\{\mu_X,H\}\circ\gamma=(X_{\mu_X}H)\circ\gamma=0.\end{aligned}$$

これは，対称性があれば保存則がある，という物理学における基本原理をシンプレクティック幾何の枠組みにおいて定式化したもので，**ネーターの定理**と呼ばれています．例えば，$\mathbb{R}^3$ 内の点粒子の運動において，群 $G=\mathbb{R}^3$ が平行移動により相空間 $M=T^*\mathbb{R}^3$ に作用します．この場合モーメント写像は運動量であり，ネーターの定理は運動量保存則となります．

このように物理系に対称性がある場合は，μ_X が保存量になるので，実質的な相空間はもっと小さなものになるはずです．$\xi\in\mathfrak{g}^*$ を G の作用で不変な元とするとき，G の M への作用は $\mu^{-1}(\xi)$ の元を $\mu^{-1}(\xi)$ の元に移します．このとき，$\mu^{-1}(\xi)$ 内の G-軌道全体からなる集合を $\mu^{-1}(\xi)/G$ により表します．$\mu^{-1}(\xi)/G$ が多様体になるとき，M のシンプレクティック構造 ω は $\mu^{-1}(\xi)/G$ のシンプレクティック構造 $\underline{\omega}$ を定めます．物理系に対称性がある場合の実質的な相空間は $(\mu^{-1}(\xi)/G,\underline{\omega})$ で，これを**シンプレクティック商**といいます．

4. 幾何学的量子化

2 節でみたように，古典系において観測量の時間発展は微分方程式 $\frac{df}{dt}=\{H,f\}$ により表されました．非常に粗っぽい言い方なのですが，量子化の手続きは，関数 f を線型作用素 $\widehat{f}$ に，ポアソン括弧積 $\{\cdot,\cdot\}$ を線型作用素の交換子 $[\cdot,\cdot]$ に対応させるものです．ただし，A,B を線型作用素とするとき，$[A,B]=AB-BA$ です．したがって，量子力学における時間発展を表す方程式は次で与えられます．

$$\frac{d\widehat{f}}{dt}=[\widehat{H},\widehat{f}].$$

量子化の枠組みをシンプレクティック幾何の言葉で定式化してみましょう．(M,ω) をシンプレクティック多様体，L を M 上の複素直線束とします．L の各ファイバーにはエルミート計量と，それを保つ接続 ∇ が定まっていて，その曲率 R^{∇} が次を満たしているとします．

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{\nabla}=\omega. \tag{17}$$

この複素直線束とエルミート接続の組 (L,∇) を**前量子直線束**といいます．L のなめらかな切断全体のなすベクトル空間を $\Gamma(L)$ で表します．M 上の関数 f に対して線型作用素 $\widehat{f}\colon\Gamma(L)\to\Gamma(L)$ を次で定めます．

$$\widehat{f}(s)=\nabla_{X_f}s+2\pi\sqrt{-1}f.$$

このとき，$[\widehat{f},\widehat{g}]=\widehat{\{f,g\}}$ が成り立ちます．

これらの線型作用素の作用する空間は，実際には $\Gamma(L)$ では少し大きすぎます．例えば 2 節のよ

うに $M = T^*\mathbb{R}^2$ として，また $L = M \times \mathbb{C}$ に自明なファイバー計量を入れておきます．このとき，L 上のエルミート接続 ∇ を

$$\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{2} p_i dq_i$$

と定めると，(17) が成り立ちます．線型作用素 $\widehat{q_i}$ や $\widehat{p_i}$ が作用する空間として $\Gamma(L)$ を考えるのではなく，$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ 方向には定数であるような $\Gamma(L)$ の元全体のなす空間（を完備化したもの）に制限します．これを量子ヒルベルト空間といい，$\mathcal{H}$ で表すことにします．このとき，線型作用素 $\widehat{q_i}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\widehat{p_i}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は次で与えられます．

$$\widehat{q_i} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} + 2\pi\sqrt{-1}q_i = 2\pi\sqrt{-1}q_i,$$
$$\widehat{p_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_i}} + 2\pi\sqrt{-1}p_i = \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

このように，通常の量子化の手続きはシンプレクティック幾何により定式化されます．これを**幾何学的量子化**といいます．

一般に，量子ヒルベルト空間を定めるためには，偏極という概念が必要になります．M の接束 TM（あるいはその複素化）の部分束 $\mathcal{P}$ がラグランジュ部分束であるとは，$\mathcal{P}$ の各 $x \in M$ におけるファイバー $\mathcal{P}_x$ が (T_xM, ω_x) のラグランジュ部分空間であることと定めます．さらに，そのラグランジュ部分束 $\mathcal{P}$ がある積分可能条件をみたすとき**偏極**といいます．量子ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ は，偏極方向には「定数」であるような $\Gamma(L)$ の元からなる部分空間（を完備化したもの）と定めます．幾何学的量子化は，量子化のある一面を理解するためには役に立ちますが，万能ではないということを注意しておきます．

幾何学的量子化の数学への応用として，リー群の表現の幾何学的な構成があります．物理系 (M, ω) がリー群 G の対称性をもっているとします．さらに G の M への作用が，前量子直線束 (L, ∇) への作用に持ち上がるとします．このとき，G は $\Gamma(L)$ に作用するだけでなく，多くの場合に量子ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ に作用して，G の表現が得られます．Borel–Weil–Bott 理論とは，コンパク

ト単純リー群の既約表現を組織的に幾何学的量子化を用いて構成する方法です．

5. 場の量子化とモジュライ空間の幾何学

今まで，古典力学を相空間上のあるベクトル場の積分曲線として記述しました．その基礎となっているのが，相空間がシンプレクティック多様体であることでした．そして，シンプレクティック幾何の枠組みで，物理系の対称性や量子化について，ある一定の理解をすることができました．以上の枠組みは場の理論にも適用され，これが1980年代から始まり，現在も進行している物理学と幾何学の活発な交流の発端となりました．その一つの例として，Chern–Simons ゲージ理論を見てみましょう．

M をコンパクト実3次元多様体とします．M 上の階数 r の自明な複素ベクトル束 $V = M \times \mathbb{C}^r$ 上の $SU(r)$-接続全体のなす空間 $\mathcal{A}(V)$ を考えます．このとき $\mathcal{A}(V)$ の元は $d + A$，ただし A は M 上の $\mathfrak{su}(r)$-値1次微分形式，と表され，Chern–Simons 汎関数 $\mathrm{cs}\colon \mathcal{A}(V) \to \mathbb{C}$ が

$$\mathrm{cs}(d+A) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$$

により定められます．Witten の主張は，自然数 k を固定するとき，分配関数

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}(V)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\mathrm{cs}(d+A)}dA \quad (18)$$

がコンパクトで向き付けられた3次元多様体 M の位相不変量になるというものでした．$\mathcal{A}(V)$ は無限次元の空間ですから，$\mathcal{A}(V)$ 上の積分を数学的に定式化することはできません．しかし，以下のようなアイディアで $Z_k(M)$ を「計算する」ことが可能になります．

図2のように3次元多様体 M を閉曲面 Σ で切って，2つの境界付き3次元多様体の和集合

$$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$$

に分解して，境界付き多様体の不変量を考えます．

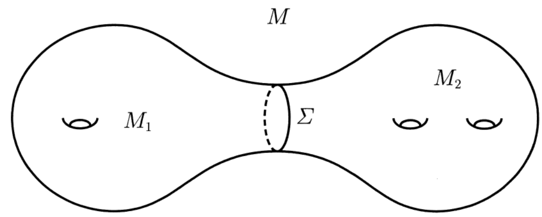


図2

M_1 の境界 ∂M_1 を境界のないコンパクトで向き付けられた2次元多様体 Σ とするとき，M_2 の境界 ∂M_2 は Σ と逆の向きをもつ $-\Sigma$ となります．M 上のベクトル束 V の Σ への制限 $E_\Sigma = V|_\Sigma$ 上の $SU(r)$-接続全体のなす空間を $\mathcal{A}(E_\Sigma)$ とします．$\mathcal{A}(E_\Sigma)$ の元は $d+a$，ただし a は Σ 上の $\mathfrak{su}(r)$-値1次微分形式，と表されます．ところで，関数 $Z_k(M_1)\colon \mathcal{A}(E_\Sigma) \to \mathbb{C}$ を

$$Z_k(M_1)(d+a) = \int_{\{d+A\in\mathcal{A}(V|_{M_1})\ |\ A|_\Sigma = a\}} e^{2\pi\sqrt{-1}k\mathrm{cs}(d+A)}dA$$

と定めると，形式的に次が成り立ちます．

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}(E_\Sigma)} Z_k(M_1)(d+a)Z_k(M_2)(d+a)da$$

すなわち，$Z_k(M)$ は $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ の自然なペアリングで得られるのです．

ところで，M を時空とみなし，Σ が空間方向で，Σ の法線方向が時間であると考えましょう．このとき，時刻を固定した場の全体は $\mathcal{A}(E_\Sigma)$ で，Σ にシンプレクティック構造を入れておくと，$\mathcal{A}(E_\Sigma)$ にもシンプレクティック構造が定まります．したがって，$\mathcal{A}(E_\Sigma)$ は無限次元のシンプレクティック多様体になりますが，この空間は**ゲージ群** $\mathcal{G}(E_\Sigma)$ の対称性をもっています．$\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は Σ から $SU(r)$ へのなめらかな写像全体のなす集合 $\mathrm{Map}(\Sigma, SU(r))$ です．$s \in \mathcal{G}(E_\Sigma)$ は $d + a \in \mathcal{A}(E_\Sigma)$ に

$$s \mapsto s^{-1}\circ(d+a)\circ s = d + (s^{-1}as + s^{-1}ds)$$

により作用します．ゲージ群は無限次元のリー群で，そのリー環は $\mathrm{Map}(\Sigma, \mathfrak{su}(r))$ です．また，その双対空間は Σ 上の $\mathfrak{su}(r)$-値2次微分形式全体

のなす空間 $\Omega^2(\Sigma;\mathfrak{su}(r))$ とみなすことができます．$\mathcal{G}(E_\Sigma)$ の $\mathcal{A}(E_\Sigma)$ への作用のモーメント写像 $\mu\colon \mathcal{A}(E_\Sigma)\to\Omega^2(\Sigma;\mathfrak{su}(r))$ は $d+a$ に対してその曲率

$$R^{d+a}=da+a\wedge a\in\Omega^2(\Sigma;\mathfrak{su}(r))$$

を対応させる写像です．したがって，シンプレクティック商 $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は E_Σ 上の平坦接続のゲージ同値類全体のなす空間，すなわち E_Σ 上の平坦接続の**モジュライ空間**です．さらに，平坦接続のうち，非自明な接続の直和に分解できないもの全体からなる集合を $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}$ とするとき，$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は既約な平坦接続のモジュライ空間になります．ここで重要なのは，$\mathcal{A}(E_\Sigma)$ や $\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は無限次元ですが，$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は有限次元の多様体となることです．また $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ は $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ のコンパクト化になります．さらに，ゲージ群による対称性から $Z_k(M_1)$ は $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ 上の前量子直線束の切断となることが形式的な議論によりわかります．

Σ に複素構造 I_Σ を定めると，$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ に複素構造 I が定まります．この複素構造は $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ の偏極 $\mathcal{P}_I$ を定めると同時に，前量子直線束 L に正則直線束としての構造も定め，この正則直線束を L_I で表します．このとき，$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)$ を幾何学的量子化して得られる量子ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\mathcal{P}_I)$ は L_I の正則切断の空間となります．Witten は $Z_k(M_1)\in\mathcal{H}(\mathcal{P}_I)$ であること，さらに $\mathcal{H}(\mathcal{P}_I)$ は Wess–Zumino–Witten 模型と呼ばれる共形場理論の共形ブロックと呼ばれるものであることを見抜きました．さらに $\mathcal{H}(\mathcal{P}_I)$ には Σ の写像類群の作用があり，この作用を用いて $Z_k(M_1)$ が特徴付けられます．同様の方法で $Z_k(M_2)\in\mathcal{H}(\mathcal{P}_I)^*$ も特徴付けることができ，$Z_k(M)=\langle Z_k(M_1),Z_k(M_2)\rangle$ が決定される，というのが Chern–Simons ゲージ理論の概要です．Witten は物理的な考察により 3 次元多様体の位相不変量 $Z_k(M)$ が存在することを予言しましたが，実際に，この位相不変量は Reshetikhin–Turaev，河野俊丈により数学的に構成されました．

複素多様体 $(\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma),I)$ は安定ベクトル束のモジュライ空間とみなすことができます．Σ に複素構造 I_Σ を定めると，$d+a\in\mathcal{A}(E_\Sigma)$ の $(0,1)$-部分 $\bar\partial+a^{0,1}$ は E_Σ の正則ベクトル束の構造とみなすことができます．すなわち $\mathcal{A}(E_\Sigma)$ は E_Σ 上のある型の正則ベクトル束の構造全体のなす空間とみなすことができます．$\mathcal{A}(E_\Sigma)$ の元は $\mathcal{G}(E_\Sigma)^{\mathbb{C}}=\mathrm{Map}(\Sigma,SL(r,\mathbb{C}))$ の作用で移りあうときに同型な正則ベクトル束となります．すなわち，$\mathcal{A}(E_\Sigma)/\mathcal{G}(E_\Sigma)^{\mathbb{C}}$ は E_Σ 上のある型の正則ベクトル束の同型類全体のなす空間となります．ところが，この商空間はあまりよい性質はもちません．そこで，安定な正則ベクトル束の構造全体のなす空間 $\mathcal{A}(E_\Sigma)^{\mathrm{st}}$ に制限すると，そのモジュライ空間 $\mathcal{A}(E_\Sigma)^{\mathrm{st}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)^{\mathbb{C}}$ は有限次元の多様体になります．しかも $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}\subset\mathcal{A}(E_\Sigma)^{\mathrm{st}}$ が成り立ち，この埋め込みは写像

$$i\colon \mu^{-1}(0)^{\mathrm{irr}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)\to\mathcal{A}(E_\Sigma)^{\mathrm{st}}/\mathcal{G}(E_\Sigma)^{\mathbb{C}}$$

を誘導しますが，この写像は全単射であることが証明されます．このように，既約な平坦接続のモジュライ空間という微分幾何的な対象と，安定ベクトル束のモジュライ空間という代数幾何的な対象が同一視されるのです．この事実は，1960 年代に Narasimhan–Seshadri の定理として知られていました．定理は証明されてはいましたが，成り立つべき必然性はよくわかっていませんでした．1960 年代に GIT（Geometric Invariant Theory）商と呼ばれる代数幾何における商空間が定式化されました．一方，1970 年代にシンプレクティック商の概念が一般的に定式化されました．この 2 種類の商空間は定義も背景も全く異なるものですが，多くの例で自然に同一視されることが知られていたようです．1980 年代に入り，Atiyah–Bott は，上で説明したように，平坦接続のモジュライ空間が接続全体の空間のゲージ群によるシンプレクティック商として表されること，Narasimhan–Seshadri の定理はシンプレクティック商と GIT 商の一致の無限次元版であることを見抜きました．定理の

本質が見えると，たちまち高次元の複素多様体上のベクトル束に対しても一般化され，現在では小林–Hitchin 対応として知られています．同種の現象は幾何の様々な場面で観察され，このシンプレクティック商と GIT 商の関係は，現代の微分幾何学の指導原理の一つになっています．

このように，一つの対象がシンプレクティック商としても GIT 商としても見ることができるということは，その対象がシンプレクティック幾何と代数幾何が交錯した豊かな幾何をもっていることを意味しており，様々な側面から深く研究されるようになりました．そのような時期に Chern–Simons ゲージ理論をはじめとして場の量子論との交流が始まり，平坦ベクトル束，安定ベクトル束のモジュライ空間の幾何の研究は飛躍的に進展したのです．

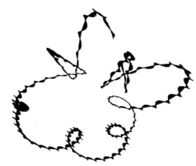
1980 年代から 1990 年代にかけて Donaldson によりゲージ理論が 4 次元多様体の微分トポロジーの研究に応用され，画期的な成果をあげていました．これは，4 次元多様体の性質を調べるために，その上の ASD (anti-self-dual) 接続のモジュライ空間を利用するものです．Donaldson による理論は，まず数学として理論が完成し，次に場の量子論としての物理的な理解が得られ，その後の場の量子論に影響を与えました．そのような中，Donaldson 不変量の弦理論版ともいうべきシンプレクティック多様体の Gromov–Witten 不変量が定義され，ミラー対称性などとの関係から，現在も活発に研究されています．このように，場の量子論とシンプレクティック幾何学の関係はいっそう深まっていますが，これらについては別の記事を参照していただきたいと思います．

参考文献

1) アーノルド (安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄共訳)：『古典力学の数学的方法』岩波書店 (1980).
2) 河野俊丈：『場の理論とトポロジー』岩波書店 (2008).
3) 小林俊行・大島利雄：『リー群と表現論』岩波書店 (2005).
4) 今野宏：『微分幾何学』東京大学出版会 (2013).
5) 深谷賢治：『シンプレクティック幾何学』岩波書店 (2008).

（こんの・ひろし，明治大学理工学部）

超弦理論と時空のコンパクト化



太田 信義

1. 超弦理論の特徴

重力の量子論として超弦理論が最有力な候補といわれて久しい[1,2]．残念ながら，超弦理論により曲がった時空がどのように記述できるかはまだ完全な理解はできておらず，量子論としては基本的に平坦な時空の周りの摂動的な揺らぎしか議論できない．曲がった時空における量子論として現在できることは，その低エネルギー有効理論として得られる超重力理論を用いた解析である．それは，超弦理論に含まれる質量が0の自由度だけを用いた記述法であり，一般相対論を含み，また局所的超対称性を持っている．この場合は，曲がった時空でも理論が定義され，古典解として反ドジッター空間が得られる．低エネルギーの現象を扱うときは，質量を持った自由度は効いてこないと期待されるので，これでかまわないが，量子論を考える場合にこれで十分なのかどうかはわからない．

超弦理論には重要な特徴が3つある．それは

1. 超弦理論は重力の存在を予言する，

2. 超弦理論は物質の存在を予言する，

3. 超弦理論はこの世の中がなぜ4次元なのかを説明する（はず），

である．以下でこれを順番に説明しよう．

まず1の点についてだが，弦は端を持った開いた弦を考えることができ，それがゲージ場などに対応するのだが，相互作用を考えると必ず端がくっついた輪ゴムのような状態ができる．これはスピン2の粒子状態に対応しており，重力子（グラビトン）と考えられる．相互作用を考えるとこのような状態が必然的に現れるのだから，重力の存在が不可欠になる．

次に，単純に弦理論を考えるとタキオンが存在して不安定な理論になる．これはボソン的弦理論と呼ばれるが，この問題を解決するには，理論にフェルミオンを付け加え，さらにボソンの状態とフェルミオンの状態を入れ替えても理論が変わらないという対称性を付け加えねばならない．これを**超対称性**といい，その対称性をもつ弦理論を**超弦理論**という．そうして初めて，理論にタキオンが存在せず，ゴーストもない理論を構成することができる．一方で，われわれの世界に存在する物質はすべてフェルミオンからできている．クォークと電子はフェルミオンである．フェルミオンはパウリの排他原理を満たし，それにより物質（原子）が安定に存在することが保証されているのである．もし電子がボソンなら，ボース・アインシュタイン凝縮として知られているように，同じ状態に電子がいくつでも入ることができ，原子が安定に存在できなくなる．したがって，矛盾がない安定な弦理論は，必ずフェルミオンの入った理論でなければならないのだから，（いささか牽強付会のそしりを受けるかもしれないが）超弦理論は物質の存在を予言するといえるわけである．

最後に，これが本稿の主題と関係するのだが，超弦理論は，時空の次元が10次元であるときに，相

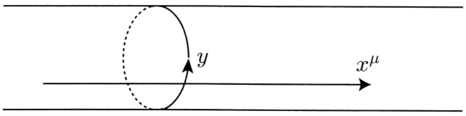


図 1　コンパクト化した 2 次元時空.

対性理論と矛盾がなくゴーストなどのないきちんとした理論になっている．このように時空が 4 次元以外の可能性を許す理論があって初めて，われわれの時空が 4 次元であることが説明できる可能性が出てくる．

では，このような理論が現実の 4 次元の世界を記述するためにはどうしたら良いだろう？ それは，時空が次の意味で**コンパクト化**しているか，余分の次元が検知できないようになっているかのどちらかであろう．

コンパクト化とは，ある次元が広がっていなくて，小さく丸まっている状況をいう．たとえば，図 1 のような無限に長い円筒の表面を考えてみよう．横方向は無限に伸びていて，通常の時空を表す．縦方向は円周になっていて，コンパクトな次元を表す．円の半径を R とすると，コンパクトな方向は有限な長さ $2\pi R$ をもつ．この円周を R に比べて十分大きなスケールで見ると，円周方向の大きさは無視できるので，太さを持たない直線に見える．このように，いくつかの方向が有限な大きさを持つ空間になっている場合，その大きさに比べて十分大きなスケールで見ると，その次元がないように見える．次節以下では，このことをより具体的に見ていこう．

もう 1 つの可能性は，4 次元の時空が 11 次元のどこかに埋め込まれていて，4 次元以外の方向には素粒子の相互作用が及ばないようになっている場合である．4 次元以外の空間は大きく広がっているのだが，それを検出する手段はない．唯一，重力だけがそちらにも伝達でき，それがかろうじてわれわれの時空が 4 次元以外にもあることを教えてくれるのである．この考え方はブレインワールドと呼ばれているが，本稿では考えない．興味のある読者は，たとえば文献 3) を参照してほしい．

2. コンパクト化

さて，時空がコンパクト化しているとき，われわれはそれをどのようにしたら知ることができるだろうか？ 例として，5 次元時空における実スカラー場 ϕ の理論を考えてみよう．5 次元時空が 4 次元ミンコフスキー空間 M_4 と半径 R の円周 S^1 の直積 $\mathrm{M}_4\times \mathrm{S}^1$ になっているとすると，ϕ^4 型の相互作用を持つ 5 次元の作用は

$$S=\int d^4xdy\left[-\frac{1}{2}\eta^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi-\frac{\lambda_5}{4!}\phi^4\right] \quad (1)$$

である．ここで 5 次元の座標 x^M $(M=0,\cdots,4)$ を，M_4 の座標 x^μ $(\mu=0,\cdots,3)$ と S^1 の座標 y に分けた．η^{MN} は平坦時空の計量である．場は y 方向に周期的な境界条件を満たしているので

$$\begin{aligned}&\phi(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n(x)e^{iny/R},\\&(\phi_n)^*=\phi_{-n}\end{aligned} \quad (2)$$

のようにフーリエ展開することができる．これを作用 (1) に代入して，y 積分を実行すると

$$\begin{aligned}S=\int d^4x\Big[&-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0-\frac{\lambda_4}{4!}\phi_0^4\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n+\left(\frac{n}{R}\right)^2\phi_n^*\phi_n\right\}\\&-\frac{\lambda_4}{4!}\sum_{n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty}{}'\,\phi_{n_1}\phi_{n_2}\phi_{n_3}\phi_{-n_1-n_2-n_3}\Big]\end{aligned} \quad (3)$$

を得る．ここで $\lambda_4=\lambda_5/(2\pi R)$ であり，和の記号 $\sum'$ は $(n_1,n_2,n_3)=(0,0,0)$ を除いた和を表す．ゼロモード ϕ_0 は質量がゼロの 4 次元の実スカラー場を表し，高次モード ϕ_n $(n=1,2,3,\cdots)$ は質量 $m_n=n/R$ を持つ 4 次元の複素スカラー場を表している．このような質量を持つ高次モードを**カルーツァ・クライン・モード**と呼ぶ．このように，5 番目の次元があって，それが小さく丸まっているということは，無限個の場を含んだ理論になっていて，理論に含まれる状態の質量が等間隔で現れるということになっている．逆に，こ

のようなことがあると，それは余分の次元があることを示していると考えられる．

カルーツァ・クライン・モードの質量は，$1/R$ のオーダーなので，$1/R$ に比べて十分低い低エネルギー現象を考える際は無視して，ゼロモードだけを考えれば良い．また，作用 (3) において，高次モードを含む項は必ず高次モードを 2 つ以上含んでいるので，運動方程式と矛盾せずに $\phi_n = 0$ $(n \neq 0)$ とおくことができる．その場合，ゼロモード $\phi_0(x)$ だけを含む 4 次元の場の理論が得られる．これを**次元簡約**という（**次元還元**，**次元縮小**ともいう）．これはコンパクト化の半径が小さい極限であると考えることもできる．ただし，量子論を考えるときは，このような高次モードが内線に効いてきて，さらにそれが無限個あるので，無視できると考えるのは危険である．

高次元の理論はもともと重力場と電磁場を統一する理論として，カルーツァ[4)]とクライン[5)] によって考えられた．彼らは 5 次元の重力理論を考え，これらの場が 5 番目の次元に依存しないとすると重力と電磁場を記述するベクトル場が得られることを示した．これはまさに上に述べた次元簡約であるが，このとき彼らの考えた 5 番目の次元は実際に存在する空間ではなくて，電磁場を得るために便宜的に考えられた空間にすぎない．1970 年代中頃までは，次元簡約が考えられていたが，高い次元は実在するとは考えていなかったと思う．超対称理論が物理的に重要であると考えられるようになった 1970 年代後半から 80 年代前半にかけて，徐々にこの風潮が変わり，余分の次元は実際に存在するであろうと考えられるようになった．特に 1980 年代前半から，超重力理論が量子重力の候補理論として考えられるようになってから，これらが実在する空間なのではないかと考えられるようになった．筆者が大学院生だったこの頃は，まさにこういう変化を肌身で感じたことを覚えている．特に，後で述べるように，重力場が入った理論の場合は，自然に時空が曲がった状況が実現し，それが運動方程式の解になっている場合がある．その場合は，このような 4 次元以外の次元が実在すると考えるのが自然であろう．

以上の例では，コンパクトな次元は 1 次元の円周であったが，一般には，いろいろな次元や種類のコンパクト化が考えられる．例としては，d 次元のトーラス T^d（d 個の S^1 の直積）や d 次元球面 S^d が考えられている．また，超弦理論では，Calabi–Yau 空間と呼ばれる 3 次元複素多様体を使ったコンパクト化が考えられている．これは実 6 次元であり，10 次元の理論から 4 次元の理論を得るのに使えると同時に，4 次元で $N = 1$ 超対称性を得ることができるので重要と考えられている．Calabi–Yau 空間については，本特集の他の記事を参照していただきたい．その他にも，次に述べる 11 次元の M 理論を G_2 ホロノミーを持つ多様体にコンパクト化すると，4 次元で超対称性をちょうどうまく持つ理論が得られるといったことも考えられている．このようにいろいろな可能性があるのだが，そのどれが本当に現実に対応しているのか，それを決める原理が必要になる．

超弦理論やその低エネルギー有効場の理論である超重力理論は，重力場を含む理論であるので，時空の様相はその重力場の従う方程式で決まる．したがって，重力場を含む理論でコンパクト化を考えるときは，コンパクト空間を含む時空が重力場の方程式になっていなければならない．このように，重力場の方程式の解として，いくつかの次元がコンパクト空間になった時空が得られることを**自発的コンパクト化**という．

3. コンパクト化と M 理論

先に述べたように，もし時空の 1 次元が円周にコンパクト化していると，等間隔の質量を持った状態が無限個現れる．このことから逆に，このようなことがあると，余分の次元があることが予想される．しかし，これはそう簡単なことではない．一般には，素粒子というのは相互作用をしているので，その厳密なスペクトルを得ることはまずできない相談である．等間隔の質量を持った状態が存在するということを，はっきり示すことが非常

に難しいのである．

ところが超対称性がある場合には，それが可能になることがある．超対称性というのはスピンの異なるフェルミオンとボソンを入れ替えても変わらない対称性である．この対称性があると，フェルミオンとボソンが同数なければならない．また質量がゼロの粒子の場合は，質量がゼロでない粒子の場合より1つの多重項に属する粒子の数が半分しかないことになる．例外として，質量がゼロでなくても，その状態が超対称性を半分破っている状態の場合は，質量がゼロの場合と同数になる．これを**BPS状態**という．これが成り立つのは，質量とチャージが等しいという関係を満たす場合となっている．BPS状態にある粒子の数は変わってはいけないので，質量とチャージの関係は，理論の結合定数がいかに変化しようとも，いかに量子論的な補正があろうとも変わってはいけない．したがって，各粒子の質量は厳密にチャージで表されることになり，厳密なスペクトルを求めることができる．超対称な理論では，ボソンとフェルミオンの量子効果が互いに打ち消し合い，このようなことが起こると考えられる．

一方，IIA型と呼ばれる超弦理論の中に，BPS状態として0ブレイン（空間的に広がりを持たない粒子の状態）があって，それは束縛エネルギーなしで束縛状態を作ることが知られていた．すなわち，n 個の0ブレインが集まったものはそのまま束縛状態と考えてよく，それは1つの0ブレインの n 倍の質量を持つ．この質量はチャージに比例しているので，量子論的にも厳密に質量が決まる．したがって，ここではまさに上に述べたような等間隔の質量を持つ状態が理論に存在していることになる．このことは，IIA型の超弦理論には，円周にコンパクト化している方向があるということを示唆している．これらの状態の質量は，超弦理論の相互作用結合定数の逆数に比例しているので，強結合の極限では質量が0になる．これは，先に見たように円周の半径が無限大の極限に相当し，理論の住んでいる空間が1次元増えた11次元ということになる．こうして，10次元のIIA型超弦理論は11次元の**M理論**のうち，1次元が円周にコンパクト化したものであるという理解ができたのである[7]．しかしBPS状態以外の状態の質量は，結合定数が大きい場合には量子的な効果を厳密に評価することは難しいので，M理論の全体像はまだよくわかっていない．理論の厳密なスペクトルがわからないのである．1次元コンパクト化した理論の弱結合での低エネルギー有効理論は，10次元のIIA型非カイラル超重力理論である．またM理論自身については，その低エネルギー有効理論が11次元超重力理論であるということくらいしかわかっていない．もちろん，これらの2つの有効理論は，次元簡約で結びついており，IIA型超弦理論とM理論が上記のような関係にあることの証拠の1つとなっている．

4. コンパクト化と高次元のなごり

先に述べたように，曲がった空間で超弦理論を考えることは非常に難しい．コンパクト化は時空が非常に大きく曲がっている場合だから，そのような状況を考えるのはその低エネルギー有効理論である超重力理論によって考えるのがよい．高い次元に存在する超重力理論は，コンパクト化または次元簡約を考えることができる．その結果，理論の中に著しい対称性が生じる．

たとえば，D 次元の重力理論において，d_2 次元部分がコンパクト化して $d_1(=D-d_2)$ 次元の時空になる場合を考えよう．その計量は，

$$g_{MN}=\begin{pmatrix} e^{2\sigma}g_{\mu\nu}+A_\mu^\gamma A_\nu^\delta G_{\gamma\delta} & A_\mu^\gamma G_{\gamma\beta} \\ G_{\alpha\gamma}A_\nu^\gamma & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

で与えられる．ここで M,N は出発点の全体の時空を，μ,ν は d_1 次元時空を，α,β,γ はコンパクト化した d_2 次元空間を表す．また，$g_{\mu\nu}$ は d_1 次元時空の計量，A_μ^γ はベクトル場，$G_{\alpha\beta}$ は $d_2(d_2+1)/2$ 個のスカラー場を表し，σ は得られる d_1 次元の理論が正しくアインシュタイン作用を与えるようにするためのスカラー場の行列式で与えられる量になる．このように，低い次元で見る

と，高い次元の理論は特定の場を特定の形で余分に含んだ理論に見え，逆にそれがもとは高い次元の理論であったことの証拠になる（このうち最も簡単な，余分の次元が 1 次元である場合がカルーツァとクラインが考えた理論である）．

それだけではなく，高い次元に存在した一般座標変換不変性は，d_1 次元の一般座標変換不変性と，ベクトル場に対するゲージ不変性，およびスカラー場に対する $SL(d_2, \mathbb{R})/SO(d_2)$ 不変性となって現れてくることがわかる．より詳しい導出と議論は，文献 6) を見ていただきたい．

もし出発点の理論が，（非アーベル）ゲージ理論である場合は

$$A_M = (A_\mu, A_\alpha) \tag{5}$$

となって，A_μ はゲージ場を，A_α はスカラー場を表す．もとの高次元の一般座標変換のうち x^μ 方向の変換に対しては，これらはベクトルとスカラーの変換性を示す．またゲージ変換は A_μ に対するゲージ変換となる．この事実を用いると，ヒッグス場のようなスカラー場はもともと高次元のゲージ理論に起源を持つとする考え方もできる．このような提案は，ゲージ・ヒッグス統一理論と呼ばれており，これらを統一的に理解できる理論として，活発に研究されている．

フェルミオン（それを表す場は**スピノール**と呼ばれる）の場合は，もう少し複雑である．一般に D 次元のフェルミオンは，ローレンツ群 $SO(1, D-1)$ のスピノール表現によって変換する量である．それに作用する反交換するガンマ行列とセットで定義される．このガンマ行列は，$2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$ 行列になる．ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数である．したがって，4 次元のスピノールは 4 成分を持ち，5 次元も同じである．6 次元になると，その成分は倍の 8 成分になる．また，次元によって，これらのスピノールに実数条件に相当する条件や，カイラルという自由度を半分にする条件を課すことができる．複素的な場を**ディラック場**，実数的な場を**マヨラナ場**，カイラルな場を**カイラル場**と呼ぶ．5 次元の理論ではマヨラナ場もカイラル場

もない．それで，ディラック場の理論が最小限の理論になるが，それを4次元にコンパクト化してみると，マヨラナ場が2種類，あるいはディラック場が1種類の理論になる．6次元の場合には成分が2倍になるが，カイラル場が許されるので，4次元では同じく2つのマヨラナ場の理論になるなど，状況が複雑である．しかし，高次元の理論ではスピノールが1つにまとまっているので，それが低い次元にコンパクト化したとき，スピノールのそれぞれの質量などを勝手に考えて良い（最初から）4次元の理論とは，対称性が高いなどの明らかに違う特徴を持つわけである．

このように，高い次元の理論を考え，それをコンパクト化あるいは次元簡約すると，対称性の高い理論が得られる．超対称性についても同様で，高い次元の超対称な理論を考えて，それを低い次元にコンパクト化してみると，超対称性が高い理論が得られる．超対称性の種類の数を N と書いて，それが1種類しかない理論を $N=1$ 超対称性，2種類の理論を $N=2$ 超対称性などと呼ぶ．超対称性を生成するチャージが，それぞれでの次元で最も成分の数が少ないスピノールになっている理論をその次元での $N=1$ の理論という．4次元での最小のスピノールはマヨラナ場（カイラル場でもよいが，それは4次元では同等）の実成分数は4であり，それが $N=1$ の理論になる．上に述べたことからわかるように，5次元の $N=1$ の理論からは4次元の $N=2$ の理論が得られる．6次元の $N=1$ の理論からも，4次元の $N=2$ の理論が得られる．さらに高い次元を考えると，10次元ではカイラルで実のスピノールが可能で，その実成分の数は $2^5/2=16$ になるので，4次元での $N=4$ の理論ができる．それを2つ集めると，$N=8$ である．また，11次元では実のスピノールが可能なので，スピノールの実成分は 2^5 であり，4次元での $N=8$ の理論に対応する．

超対称性の種類が多くなると，その理論に含まれる粒子の最高スピンがどんどん高くなっていく．なぜなら，超対称性は一般に粒子のスピンを1/2ずつ変えるので，超対称性の種類がたくさんあると大きなスピンの状態が入らざるを得ないからである．一方，相互作用のある場の理論としてはスピンが2の重力子を含む一般相対論までしかできていないし，それを超えた理論はできないと考えられている．そのため超対称性の種類としては $N=8$ までしかあってはいけないということになる．これを4次元でちょうど出すのが，11次元であり，それより高い次元の超対称な理論は4次元で $N=8$ より大きな N の理論に対応してしまう．したがって，**物理的に可能な次元は11次元までに限る**ということになる（もちろん，12次元の相互作用のある超対称な理論は作られていない）．理論の存在の可能性から，あり得る次元の数が制限されるというのは，大変面白いことである．

またゲージ理論，すなわちスピンが2までの理論というのは，$N=4$ までの超対称性でないといけない．それより大きいとどうしてももっと大きなスピンの状態が必要になるからである．したがって，ゲージ理論が可能なのは，10次元までに限られる．

もう一つ注意しておかなければならないのは，先ほど述べた相互作用のある**場の理論**に関する制限である．ここで場の理論といっているのは，相対論的に不変な局所的相互作用を持つ場の理論のことであり，粒子の理論のことである．したがって，有限個の局所場で書けないような理論で，スピンが2を超えた状態が相互作用していても，ただちに矛盾していると主張しているわけではない．実際，超弦理論の中には，質量が大きく，スピンが2を超える状態が無限個入っていて，それらが非常にうまく相互作用している理論になっている．

5. 超弦理論におけるコンパクト化とデュアリティ

超弦理論でコンパクト化が起こると，場の理論ではなかった新しい現象が起こる．場の場合は式(3)の展開からわかるように，この状態の運動量は

$$p=\frac{n}{R}, \qquad n\in\mathbb{Z} \tag{6}$$

のように量子化される．弦理論の場合は，それだけでなく，弦が円周に巻き付くことが許される．その結果，この状態の持つエネルギー，すなわち質量の2乗が

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \quad (7)$$

で与えられる．ここで w は弦が円周に何回巻き付いたかという巻き付き数を表し，α' は弦の張力の逆数，$N, \tilde{N}$ は弦の（右向きと左向きの）振動のエネルギーレベルを表す整数である．これからすぐわかることは，この質量は

$$R \leftrightarrow R' \equiv \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w, \quad N \leftrightarrow \tilde{N} \quad (8)$$

の入れ替えのもとで変わらないことである．

超弦理論が（少なくとも）1次元コンパクト化しているときにこのような変換を考えると，ある場合には理論が不変だったり（自分自身に戻る），あるいは対応する理論があってそれと行ったり来たりすることになる．たとえば10次元のII型と呼ばれる閉じた弦ばかりでできている超弦理論には2種類あり，その間で行ったり来たりすることになる．これを**Tデュアリティ**と呼ぶ．

Tデュアリティを開弦の場合に考えると，そこにディリクレ境界条件を満たす広がった物体が存在するべきということになる．これをDブレインと呼ぶが，それに端がくっついているのが開弦で，Dブレインが広がっている方向には開弦の端も動くことができる．開弦の理論は，空間9次元に広がった9ブレインの理論と考えることができる．

11次元のM理論において，2次元がトーラス T^2 にコンパクト化している場合を考えよう．この理論は，結合定数が2つの円周の半径の比になったIIB型理論と考えることができる[1]．そうすると，2つの円周は同等なので，この半径の比は考え方によりどちらの円周の半径が分母になって，どちらが分子になるかは変えてもかまわない．というより，その定義の仕方はどうでも良いはずである．それが何を意味するかというと，このIIB型の超弦理論では，結合定数を逆数にしても同じIIB型理論になるということである．すなわち，IIB型理論には結合定数を逆数にしても元の理論に戻る対称性がある．これは相互作用の強さが弱い理論と強い理論を入れ替える変換なので，strong-weak入れ替えということから，**Sデュアリティ**と呼ばれている．IIB型理論の強結合極限は，同じ理論である．一方，IIA型理論の場合は，その強結合極限は，すでに見たようにM理論になっている．これはM理論をコンパクト化して理解できるが，この対称性は，これらの理論の低エネルギー有効理論である超重力理論で具体的に見ることができる．超重力理論にも超弦理論に対応したIIA型とIIB型の理論があって，そこで強結合極限をとると上記のような現象が起こる．

このように，理論のコンパクト化を考えると，いろいろな超弦理論の間の関係をつけることができる．矛盾のない超弦理論としては，10次元において

1. $SO(32)$ I型超弦理論，
2. $SO(32)$ ヘテロ型弦理論，
3. $E_8 \times E_8$ ヘテロ型弦理論，
4. IIA型超弦理論，
5. IIB型超弦理論

の5つがあることが知られているが，以上のデュアリティにより関係することがわかっている[1,2]．この理解にはコンパクト化が大変役に立つ．

なお，最初のI型超弦理論は開弦を含む理論であるが，残りは閉弦だけの理論である．そのうちヘテロ型弦理論は，1部26次元のボソン弦と10次元の超弦を貼り合わせ，その次元の差の内部空間がコンパクト化したものと考えることができる．この16次元の内部空間は，自己双対な偶格子で張られるものである必要があり，その結果上の2種類の理論が得られる．このように，超弦理論においては，コンパクト化は様々なところで大きな役割を果たしている．

6. むすび

高い次元というのは，物理の世界では今から100年近く前に考えられたが，それは実在する空間と

して考えたのではなかった．それが実際に存在するかもしれないと考えられるようになったのは比較的最近であり，それはコンパクト化していると考えられている．空間のコンパクト化の結果は4次元の理論においては，質量が等間隔に現れる粒子の状態として見えたり，高い対称性が実現するという形で発現する．また，種々の理論が統一的に理解できるということも起こる．現在の所，本当に物理的な高次元があるかどうかという点に対し決定的な証拠はないが，もし本当にあるとすると，物理学の世界に大きな可能性が広がると思う．さらにそれらの空間を自由にコントロールできるようになれば，そこに入り込んで姿を隠すこともできるのであろうか．それとも，そのようなことは実現できない夢であろうか．妄想ならぬ夢と期待を持って注目したい．

参考文献

1) 太田信義：『超弦理論・ブレイン・M 理論』，丸善出版 (2012).
2) ポルチンスキー：『超弦理論』，丸善出版（伊藤克司・小竹悟・松尾泰訳，2012）.
3) 特集：「ブレーンワールド新展開」，数理科学，サイエンス社（2004 年 1 月号）.
4) T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin (*Math. Phys.*) **1921** (1921) 966.
5) O. Klein, *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
6) 谷井義彰：『超重力理論』，臨時別冊数理科学，サイエンス社 (2011).
7) E. Witten, *Nucl. Phys. B* **443** (1995) 85.

（おおた・のぶよし，近畿大学理工学部）

カラビ・ヤウ多様体と導来圏

戸田 幸伸

1. 空間とは何か

数学者や物理学者ではない通常の人が思い描く「空間」とは，縦，横，高さの広がりを持ったどこまでも果てしなく広がる容器のようなものである．これは，基本的には（縦，横，高さ）の座標を持った「点」の集まりであると考えられる．実際に我々が住む空間はより複雑な構造を持つため，それを理解するために様々な幾何学理論が構築され，用いられてきた．例えばアインシュタインの一般相対性理論によって宇宙の重力分布に応じて空間が曲がっていることが判明した．そのため，これを理解するために空間の曲がり方を測ることが可能なリーマン幾何学が用いられた．しかし，どのような幾何学理論においても空間が点の集まりであることは外せない前提条件であった．考察する対象が点の集まりであるならば人間の直観を思う存分使って理論を展開できるし，実際そのようにして幾何学は発展してきた．

一方，統一理論の候補として注目されている超弦理論では宇宙の至る所に目には見えない微小（10^{-35} メートル位）な 6 次元空間が潜んでいると考えられている．この 6 次元空間は**カラビ・ヤウ多様体**と呼ばれている．カラビ・ヤウ多様体自体は点の集まりであり，従来の代数幾何学や複素幾何学で研究されてきた由緒正しき幾何的対象である．しかし，これをそのまま点の集まりと考えていると，異なる二つのカラビ・ヤウ多様体が定める物理理論が等価になるという不可思議な現象が起こる．これは超弦理論によって宇宙を記述するには，従来の幾何学では同一視できないカラビ・ヤウ多様体を同一視できる何らかの幾何学を構築しなければいけないことを示唆している．

仮にこのような幾何学が存在するなら，考えるべき幾何的対象は点の集まりではない．一つの結論を述べるなら，我々は何らかの性質を満たす「**圏**」を幾何的対象と考えるべきである．圏とは「対象」という集合とそれらの間の「射」という概念からなる，数学的対象物たちのいわば社会集団のようなものである．カラビ・ヤウ多様体から出発すると**連接層の導来圏**や**深谷圏**という圏が構成されるが，カラビ・ヤウ多様体そのものよりもこれらの圏のほうが超弦理論において本質的な情報を担っていると考えられている．そこで，これらの圏を幾何的対象とみなして理論を展開しようという考え方である．しかし，圏には点というものは見えず，このような「**圏の幾何学**」は人間の直観とは大分かけ離れている．実際，このような幾何学は現在でも思想的な段階であり，確立した理論が存在しているわけではない．本稿では連接層の導来圏に焦点を絞って，圏の幾何学の思想について解説していく．

2. カラビ・ヤウ多様体

まずは，超弦理論で重要な役割を果たすカラビ・

ヤウ多様体について解説する．カラビ・ヤウ多様体とは，幾つかの多項式の零点集合として定義される幾何的図形（**代数多様体**）であり，ある種の特別な性質を満たすものである．代数多様体を研究する数学の分野は代数幾何学と呼ばれる．例えば，直線，円，放物線，楕円曲線などは代数多様体の例である．考える対象は点の集まり（方程式の解の集まり）としての幾何的図形であるので，幾何的直観に基づいた理論を展開することが可能である．一方，代数多様体が多項式で定義されている点に注目して，これらを代数的な手法で研究することも可能である．代数幾何学の特徴として，それが数学の様々な分野と密接に関わることが挙げられる．例えば整数係数の多項式の整数解を求めよ，という問題は数論的な問題であるが，代数幾何学を用いてこのような問題にアプローチ可能である（このような研究分野は数論幾何学と呼ばれる）．

多くの場合，代数多様体は複素数体上で考える．つまり，代数多様体とは幾つかの多項式 $f_1, \cdots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ の $\mathbb{C}^n$ 内の共通零点集合

$$(f_1 = \cdots = f_k = 0) \subset \mathbb{C}^n \qquad (1)$$

である．より正確には上記のように得られる代数多様体はアフィン代数多様体と呼ばれ，一般の代数多様体はこれらアフィン代数多様体を貼り合わせることで得られる．アフィンではない代数多様体の基本的な例は複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ である．これは集合としては $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C}^*$ の自然な作用で割ったものである．$(X_0, \cdots, X_n)$ を $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の座標とし，$0 \le i \le n$ に対して U_i を次で定める：

$$U_i = \{(X_0, \cdots, X_n) \in \mathbb{P}^n : X_i \neq 0\}. \qquad (2)$$

U_i は $\mathbb{C}^n$ と同一視でき，これはアフィン代数多様体である．$\mathbb{P}^n$ はこれら U_i を代数的な座標変換で貼り合わせることで得られる．$\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{P}^n$ の大きな違いは，前者は非コンパクトであるが後者はコンパクトである点にある．アフィン代数多様体と同様に，同次多項式 $F_1, \cdots, F_k \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ に対して代数多様体

$$X = (F_1 = \cdots = F_k = 0) \subset \mathbb{P}^n \qquad (3)$$

が定まる．これは U_i 上で $F_1 = \cdots = F_k = 0$ で与えられるアフィン代数多様体を代数的な座標変換で貼り合わせたものである．(3) で与えられる代数多様体は複素射影的代数多様体と呼ばれる．

複素射影的代数多様体 X は，単連結かつ標準束 $\wedge^3 T_X^\vee$ が自明になるときにカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる．例えば (3) において $\dim X = n - k$ で，さらに次が成立するとする（ここで $\dim X$ は複素数体上の次元である）：

$$\deg F_1 + \cdots + \deg F_k = n + 1.$$

このとき，(3) はカラビ・ヤウ多様体である．特にカラビ・ヤウ多様体は一つではなく無数に存在する．しかし一般には $\dim X > n - k$ となる場合もあり，そのような場合 X の幾何構造を調べるのはより困難になる．$\dim X = 3$ のとき，X は複素数体上 3 次元なので，実 6 次元の多様体になる．これが超弦理論で現れる 6 次元空間である．最も簡単な例は，5 次同次式 $f \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_4]$ で定義される $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次超曲面

$$\{f(X_0, X_1, \cdots, X_4) = 0\} \subset \mathbb{P}^4$$

である．しかし上の例は最も簡単といっても，数学的に十分難しく，面白い空間である．

3. Grothendieck スキーム論

前述した代数多様体は，方程式の解集合という点の集まりである．しかし 1950 年代に超弦理論とは無関係に，一見すると点のない代数幾何学の枠組みを構築した数学者が存在した．Alexander Grothendieck である．彼は**スキーム論**を導入して，従来までの代数幾何学の考え方を一変させてしまった．

代数多様体に限らず一般に空間を与えると，その上の関数全体は可換環という代数構造を持つ．環

とは足し算や引き算，掛け算ができる代数系のことであり，これが可換であるとは掛け算の順序を入れ替えても不変であることを指す．例えば整数全体や多項式全体は可換環を成す．Grothendieck によるスキーム論の根本的な考えは，代数多様体の大域的な「幾何学」はその上の局所的な多項式型関数が成す環の「代数」を貼り合わせることで得られる，ということである．つまり，環という代数的な対象から元の代数多様体の局所理論を復元できる．これは次のように与えられる：可換環 R から出発して，R の素イデアル全体の集合 $\operatorname{Spec} R$ を考える．ここで $I \subset R$ がイデアルであるとは，足し算と R の元の掛け算で閉じている R の部分集合であることを言う．I が素イデアルであるとは，$ab \in I$ なら $a \in I$ か $b \in I$ が成立することを言う．これは整数環 $\mathbb{Z}$ における素数の類似物である．実際，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は集合として次のように書ける：

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{p\mathbb{Z} : p \text{ は素数 }\} \cup \{0\}.$$

集合 $\operatorname{Spec} R$ には局所環付き空間という幾何学的構造が入り，これはアフィンスキームと呼ばれる．局所環付き空間とは，位相空間であってその上の局所的な関数の概念が定められている空間である．代数多様体は自然に局所環付き空間を定め，これは幾つかの環から定まるアフィンスキームたちを貼り合わせたものである．例えばアフィン代数多様体 (1) は次のアフィンスキームと同一視できる：

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_k).$$

上の例のように $\mathbb{C}$ 上の有限生成代数を与えると，その Spec をとってアフィン代数多様体を与えることができる．$\mathbb{C}$ 上の代数多様体はこのように得られたアフィン代数多様体を貼り合わせることで得られる．複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ はアフィン代数多様体 (2) の貼り合わせであったが，各 U_i は次のように同一視できる：

$$U_i = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_0/X_i, X_1/X_i, \cdots, X_n/X_i].$$

しかし，可換環にはこのような $\mathbb{C}$ 上の有限生成代数に限らず整数環や正標数の体上の環など様々な種類の環が存在する．それにもかかわらず，それらの Spec をとって貼り合わせることでスキームと言う幾何的対象を得ることができる．環というのは足し算，引き算，掛け算ができる代数的な対象であった．環だけを見ていると，そこには「点」というものは存在しない．Grothendieck スキーム論は，代数多様体の幾何学を展開するのに（原理的には）点は必要ないと言っている．

4. 連接層の圏

可換環 R から定まるアフィンスキーム $U = \operatorname{Spec} R$ を考える．U は点の集合から成る幾何的対象であり，R は U 上の関数の集合とみなせる．例えば R が $\mathbb{C}$ 上の有限生成代数なら，R は U 上の複素数値多項式関数全体とみなせる．しかし，一般に空間には様々な意味での関数が存在する．例えばベクトル束の切断だったり，部分空間上で定義された関数でその外ではゼロであるような関数などがある．これらはアフィンスキームの言葉では R 上の有限生成加群たちに対応する．ここで集合 M が R 上の加群であるとは，M に足し算，引き算及び R の元と M の元との掛け算が定まっており，これらが R における掛け算と整合しているものである．例えばイデアル $I \subset R$ は R 上の加群である．R 上の加群 M が有限生成であるとは，有限個の M の元が存在してそれらと R の掛け算，及び足し算，引き算ですべての M の元が復元できることを言う．R 自身は当然 R 上の加群であり，それらの有限個の直和もそうである．これは U 上のベクトル束に対応する．また，イデアル $I \subset R$ の商をとって定まる R 加群 R/I は I の元の共通零点上で定義された関数で，その外ではゼロである．

可換環 R を一つ固定して，その上の有限生成加群全体の集合 $\operatorname{mod} R$ を考える．この集合の要素は一見バラバラに見えるかもしれないが，様々な関係がある．例えばイデアル $I \subset R$ を考えると，I も R も $\operatorname{mod} R$ の要素であるが，I は R の部分

集合であるという関係がある．しかも，I は単なる R の部分集合ではなく，R 加群の構造を保つような部分集合である（そもそもこれがイデアルの定義であった）．二つの要素 $M, N \in \operatorname{mod} R$ の間の関係性を測るのは，その間の写像 $f\colon M \to N$ であって M, N の R 加群の構造を保つものの集合である．これを $\operatorname{Hom}(M, N)$ と書く．この集合の要素が多ければ多いほど M と N の間に多くの関係が存在すると言える．集合 $\operatorname{mod} R$ の要素を「対象」と呼び，二つの対象から定まる集合 $\operatorname{Hom}(M, N)$ を「射」と呼ぶ．このように対象からなる集合とそれらの間の射からなる数学体系は「圏」と呼ばれる．圏とは，いわば数学的対象たちから成る一つのコミュニティーである．上述により，$\operatorname{mod} R$ は圏である．

代数多様体 X は可換環の貼り合わせであると述べた．つまり，可換環の集合 $\{R_i\}_{i \in I}$ が存在して X は $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ たちを貼り合わせたものである．各 i について R_i は可換環なので，R_i 加群の圏 $\operatorname{mod} R_i$ が定義できる．これらは，X 上の局所的な関数の類似物たちから構成される圏である．大域的な関数の類似物を構成するには，各 R_i 加群たちを貼り合わせる必要がある．つまり，各 i に対して R_i 加群 M_i を選び，それらが $U_i \cap U_j$ 上で同型であると要請する．このようにして得られた「局所的な関数の類似物の貼り合わせ」は**連接層**と呼ばれる．二つの連接層が与えられたとき，それらの間の射の集合も同様に定義できる．よって，代数多様体 X に対して，その上の連接層全体から成る圏を定義できる．これを $\operatorname{Coh}(X)$ と書く．

代数多様体 X から定まる圏 $\operatorname{Coh}(X)$ には様々な対象が存在する．例えば各 U_i 上で R_i を選び，$U_i \cap U_j$ 上でそれらを自然に貼り合わせると連接層が得られる．これは X の構造層と呼ばれ，$\mathcal{O}_X$ と記述される．また，X 上の代数的ベクトル束も $\operatorname{Coh}(X)$ の対象とみなせる．これは各 U_i 上の R_i の幾つかの直和を捻って貼り合わせることで得られる．また，部分代数多様体 $Y \subset X$ 上の連接層は自然に X 上の連接層とみなせる．これは，Y の外ではゼロになるような関数の類似物である．

5. 圏の幾何学

代数多様体 X 上の各点 $x \in X$ に対して，上述の議論からその構造層 $\mathcal{O}_x$ は $\operatorname{Coh}(X)$ の対象とみなせる．これら点の構造層たち $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in X}$ は $\operatorname{Coh}(X)$ における重要な対象のクラスである．なぜなら，これらは $\operatorname{Coh}(X)$ の単純対象たちの集合と一致するためである．ここで $E \in \operatorname{Coh}(X)$ が単純対象であるとは，非自明な部分対象 $0 \neq F \subsetneq E$ が存在しないものを指す．つまり，$\operatorname{Coh}(X)$ から出発して元の代数多様体 X の点の情報が復元できる．実際，これは元の代数多様体を完全に復元する．つまり，X, Y を二つの代数多様体として，$\operatorname{Coh}(X)$ と $\operatorname{Coh}(Y)$ が同値な圏であるとする．すると X と Y は同型である．粗い言い方をすると，代数多様体を考える事とそれから定まる連接層の圏を考える事はほぼ同じことである．圏とは対象と射から成る数学的体系のことであった．よってそれは，従来の点の集まりからなる幾何的対象ではない．しかし，上の観察は圏という数学的対象のコミュニティーをあたかも幾何的対象であるとみなすことの妥当性を示している．

とはいっても，連接層の圏から出発してその単純対象たちを考えると点の構造層が見えるのだから，ここまでは何も突飛なことを言っているわけではない．重要な事実は，代数多様体よりも圏のほうがはるかにたくさん存在するということである．この点に着目すると，従来の幾何学的枠組みでは捉えることのできなかった幾何的対象を圏を用いて定義することができる．例えば代数多様体を定義するのは可換環の貼り合わせデータであったが，圏を用いることにより各可換環を非可換環に置き換えた非可換代数多様体を定義することができる．非可換環から出発しても，その Spec の類似物を構成して空間を作るという議論は安直には上手くいかない．しかし，非可換環上の加群の圏は可換の場合と同様に定義でき，それらを貼り合わせた圏を定義することが可能である．このよ

うに，従来の代数幾何的枠組みで定義することのできなかった非可換代数多様体を圏として定義することができる．この非可換代数多様体には，必ずしも点が存在するとは限らない．存在するのは，その上の連接層（圏の対象）のみである．

6. 連接層の導来圏

X を 3 次元（実 6 次元）カラビ・ヤウ多様体とする．超弦理論では X 上の弦の境界条件を与える D ブレインというものがある．これは X 上の膜のようなものであり，例えば部分代数多様体 $Y \subset X$ 上のベクトル束は D ブレインを与える（正確には D ブレインには A 型と B 型があり，ここで述べるのは B 型の D ブレインである）．前述したように，これは X 上の連接層である．よって，D ブレインとは数学的には X 上の連接層に他ならないと考えるかもしれない．しかし，連接層だけを考えていては説明できない D ブレインも存在する．例えば D ブレインが与えられると，その反 D ブレインというものも存在するが，そのような反 D ブレインに対応するものは連接層には存在しない．また連接層の間の射は二つの D ブレインに貼りつく弦を表しているが，これに対応してタキオン系というシステムが存在しなければいけない．しかし，連接層の圏にはそのようなシステムは存在しない．

1994 年の国際数学者会議で Kontsevich[1)] は連接層の圏ではなくその導来圏が D ブレインの圏に対応すると主張した．代数多様体上の連接層の導来圏は 1960 年代に Grothendieck によって導入された概念であり，その元々の動機は技術的な要請に基づいていた．例えば代数多様体の間の射 $f\colon X \to Y$ が与えられると，それに応じて連接層の圏の間の対応（関手と呼ばれる）

$$
\begin{aligned}
f_*\colon \mathrm{Coh}(X) &\to \mathrm{Coh}(Y), \\
f^*\colon \mathrm{Coh}(Y) &\to \mathrm{Coh}(X)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が自然に定まる．しかし，上の関手たちは連接層の圏のある種の構造を保たない．例えば f_* は連

接層の間の全射を保たないし，f^* は単射を保たない．様々な状況で，このような性質は都合が悪かった．その代わり，連接層の導来圏を考えるとこのような連接層の圏の悪い性質が改善される．

連接層の導来圏は，その対象が連接層の有界な複体から成る．つまり対象は

$$\mathcal{F}^\bullet = \cdots \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

と書ける．ここで各 $\mathcal{F}^i$ は連接層であり，$|i|$ が十分大きいなら $\mathcal{F}^i = 0$，そしてすべての i について $d^{i+1} \circ d^i = 0$ となる．二つの複体 $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet$ の間の射の空間の定義はもっと難しいが，大雑把に言うとそれらは次の図式の集合として与えられる：

$$\mathcal{F}^\bullet \xleftarrow{f} \mathcal{H}^\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{G}^\bullet. \tag{5}$$

ここで f, g は通常の複体としての射であり，f は擬同型である．擬同型の意味は，各 i に対して $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$ を $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$ と置くと，すべての i について f が同型

$$\mathcal{H}^i(f) \colon \mathcal{H}^i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^i(\mathcal{G})$$

を誘導するということである．要するに，擬同型な二つの複体は導来圏の中で同一視されるのである．連接層の導来圏は $D^b \operatorname{Coh}(X)$ と記述される．

$\operatorname{Coh}(X)$ の代わりに $D^b \operatorname{Coh}(X)$ を考えると，前述した反 D ブレインやタキオン系と言ったものの対応物が存在することが分かる．反 D ブレインのほうは，連接層の複体 $\mathcal{F}^\bullet$ に対してその複体の次数をずらす操作

$$\mathcal{F}^\bullet[1] = \cdots \to \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{d^2} \mathcal{F}^3 \xrightarrow{d^3} \cdots \tag{6}$$

が対応する．また，複体の間の射 $f \colon \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$ が与えられたとき，タキオン系は次の複体の射の列が対応する：

$$\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \oplus \mathcal{F}^\bullet[1] \to \mathcal{F}^\bullet[1]. \tag{7}$$

ここで $\mathcal{G}^\bullet \oplus \mathcal{F}^\bullet[1]$ は次で与えられる複体である：

$$\begin{pmatrix} d^i & f^{i+1} \\ 0 & d^{i+2} \end{pmatrix} \colon \mathcal{G}^i \oplus \mathcal{F}^{i+1} \to \mathcal{G}^{i+1} \oplus \mathcal{F}^{i+2}.$$

数学の言葉では (6) はシフト関手，(7) は完全三角形と呼ばれる．このようにシフト関手や完全三角形の概念が存在して，ある種の公理を満たすものを**三角圏**と呼ぶ．上述により，連接層の導来圏は三角圏の構造を持つ．

代数多様体の間の射 $f \colon X \to Y$ に対して，(4) の代わりに導来圏の間の関手

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f_* &\colon D^b \operatorname{Coh}(X) \to D^b \operatorname{Coh}(Y), \\ \mathbf{L}f^* &\colon D^b \operatorname{Coh}(Y) \to D^b \operatorname{Coh}(X) \end{aligned} \tag{8}$$

を定義することができる．(4) と異なるのは，(8) は導来圏の三角圏としての構造を保つという点にある．よって連接層の圏を考えていたのでは不満だった技術的な点が，導来圏を考えることで解消されたことになる．前述したように，導来圏の概念は超弦理論で D ブレインが発見される前に確立されていた．元々，(8) のような構造を保つ関手を構成することが目的であったため，導来圏は単なる技術的な道具であるというのが数学者の間の共通認識であった．このような認識は Kontsevich によって覆され，導来圏はそれ自身が興味深い研究対象であるとみなされるようになったのである．

7. フーリエ・向井変換

第 5 節で，連接層の圏から元の代数多様体が復元できると述べた．これは，点の構造層たちが連接層の圏の圏論的データから復元できたためであった．これは，連接層の圏をその導来圏に置き換えると成立しない．なぜなら，点の構造層たちを特徴づける「単純対象」というものがそもそも導来圏に対しては意味を成さないためである（導来圏における射は図式 (5) で与えられるが，これにより複体の間の射の単射性は崩れてしまうことに依る）．実際，異なる代数多様体の連接層の導来圏が同値になることがあり得る．このような現象は，1981 年に向井茂氏によりアーベル多様体とその双対アーベル多様体の間の導来同値として示された．ここでアーベル多様体とは，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{Z}^{2n}$ と同型な部分群で商をとって得られる代数多様体を意

味する．与えられたアーベル多様体上の直線束で位相的に自明なもの全体の集合を考えると，代数多様体の構造が入る．これもアーベル多様体になり，双対アーベル多様体と呼ばれる．A をアーベル多様体とし，$\widehat{A}$ をその双対アーベル多様体とする．$A \times \widehat{A}$ 上にはポアンカレ直線束 $\mathcal{P}$ と呼ばれる直線束が存在する．これは各点 $x \in \widehat{A}$ に対して $\mathcal{P}|_{A \times \{x\}}$ が x に対応する直線束を与えるものである．$\pi_A, \pi_{\widehat{A}}$ を $A \times \widehat{A}$ から $A, \widehat{A}$ への射影とする．ポアンカレ直線束 $\mathcal{P}$ を用いて，関手

$$\mathbf{R}\pi_{A*}(\mathbf{L}\pi_{\widehat{A}}^*(*) \otimes \mathcal{P})\colon D^b \operatorname{Coh}(\widehat{A}) \to D^b \operatorname{Coh}(A) \tag{9}$$

を構成できる．向井氏は上の関手が同値であることを示した．上のような関手はフーリエ変換の類似物とみなせることから，**フーリエ・向井変換**と呼ばれる．A と $\widehat{A}$ は必ずしも同型とは限らないため，これは連接層の導来圏は元の代数多様体を復元しないことを意味している．

向井氏による上述の結果はアーベル多様体上のベクトル束の解析が目的であったため，その動機は超弦理論とは独立であった．その後，Kontsevich によって連接層の導来圏と超弦理論の関連が明らかにされ，$(A, A^\vee)$ のように導来圏が同値である代数多様体の組の例の構成が興味を集めるようになった．その中でも，2000 年頃の Bondal–Orlov や Bridgeland による双有理同値な 3 次元カラビ・ヤウ多様体の間の導来同値は重要な結果である．ここで二つの代数多様体 $X, X^\dagger$ が双有理同値であるとは，何らかの部分代数多様体 $C \subset X, C^\dagger \subset X^\dagger$ を除いて同型，つまり $X \setminus C \cong X^\dagger \setminus C^\dagger$ ということを意味する．このような二つの 3 次元カラビ・ヤウ多様体 $X, X^\dagger$ は，次のフロップと呼ばれる図式の合成で結ばれることが知られている．

$$\begin{array}{ccc} (C \subset X) & & (C^\dagger \subset X^\dagger) \\ & \searrow^{f} \quad {}^{f^\dagger}\swarrow & \\ & (p \in Y). & \end{array}$$

ここで $C, C^\dagger$ は幾つかの $\mathbb{P}^1$ を貼り合わせたものであり，$f(C) = f^\dagger(C^\dagger) = p$，そして $f, f^\dagger$ は C, $C^\dagger$ の外で同型である双有理射である．このとき，次の同値が存在する：

$$\Phi\colon D^b \operatorname{Coh}(X^\dagger) \xrightarrow{\cong} D^b \operatorname{Coh}(X). \tag{10}$$

最も簡単なフロップの例を考えると，$C = C^\dagger = \mathbb{P}^1$ であり，$X, X^\dagger$ は次のブローアップ・ダウン図式で記述できる：

$$\begin{array}{ccc} & (D \subset Z) & \\ & {}^{g}\swarrow \quad \searrow^{h} & \\ (C \subset X) & & (C^\dagger \subset X^\dagger). \end{array}$$

上の図式で $D = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であり，g, h は D の外で同型，$g|_D, h|_D$ はそれぞれ第 1 成分，第 2 成分への射影である．同値 (10) はこの場合，次で与えられる：

$$\Phi = \mathbf{L}h^* \circ \mathbf{R}g_* : D^b \operatorname{Coh}(X^\dagger) \to D^b \operatorname{Coh}(X).$$

上の記述を用いて，各点 $x \in X$ に対して定まる対象 $\Phi(\mathcal{O}_x)$ を考える．$x \notin C$ なら $\Phi(\mathcal{O}_x)$ はある $x' \in X^\dagger \setminus C^\dagger$ の構造層 $\mathcal{O}_{x'}$ である．一方，$x \in C$ なら $\Phi(\mathcal{O}_x)$ は連接層ではなく，連接層の成す 2 項複体である．$\Phi(\mathcal{O}_x)$ のコホモロジー層は $C^\dagger$ に台を持つが，その見た目は点の構造層とは異なるものである．しかし Φ は同値なのだから，$\Phi(\mathcal{O}_x)$ は $x \in C$ でも圏論的にはあたかも点の構造層のように振る舞う．このように，導来圏においては一見すると点のようには見えない対象が点と同じ性質を持つことがあり得る．

8. 導来圏の幾何学

Kontsevich によりカラビ・ヤウ多様体上の連接層の導来圏は超弦理論における D ブレインの圏であるとみなされるようになった．これは，連接層の導来圏が同値であるような二つのカラビ・ヤウ多様体（例えば前述のように双有理同値な 3 次元カラビ・ヤウ多様体）が定める超弦理論は本質的に等価であることを意味する．つまり，導来圏が同

値であるような二つのカラビ・ヤウ多様体は原理的に実験や観測で区別することができない．よって，我々はこのような（従来の幾何学では区別されていた）二つのカラビ・ヤウ多様体を同一視する何らかの「幾何学」を考察しなければいけない．この「幾何学」における対象物は，従来の幾何学における点の集まりではあり得ない．それでは，どのような幾何学を考察すれば良いのだろうか．

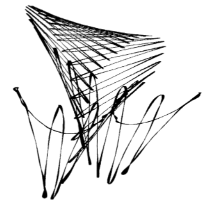
第 5 節で，代数多様体をその連接層の圏で置き換える「圏の幾何学」について解説した．我々はこの圏の幾何学のアイデアに立脚した幾何学を考察すべきである．但し，第 5 節で述べたように連接層の圏を考えるのではなく，その導来圏を幾何的対象とみなす．つまり，我々が考察すべき「幾何学」の対象物は滑らかな射影的代数多様体の連接層の導来圏たち，さらにはそれらを一般化した何らかの「良い」三角圏である．驚くべきことに，このような「幾何学」は超弦理論に関連する幾何学のみならず，古典的代数幾何学における双有理幾何学と呼ばれる幾何学においてもより自然な枠組みを提供すると考えられている（これはフロップによる同値 (10) から示唆される）．しかし，このような「導来圏の幾何学」における幾何的対象には点というものは存在せず，人間の持つ幾何的直観を用いて理論を展開することは不可能である．よってこれは未だ思想的な域を出ない幾何学理論であるが，様々な分野の数学者の貢献により徐々にその姿が明らかになりつつある．

参考文献

1) M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Vol.1 of *Proceedings of ICM.*, Birkhäuser, Basel, 1995.

（とだ・ゆきのぶ，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

ミラー対称性



堀　健太朗

マックスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

をご存知でしょうか？ これは19世紀の中頃に書き下された古典電磁気学の基本方程式ですが，相対論の発見など，その後の物理学の発展において中心的役割を果たしてきました．現在「素粒子の標準模型」と呼ばれるものは電磁場の量子論をひな形とする「非可換ゲージ理論」として定式化されています．また，この方程式に始まる物理学の発展は数学，特に微分幾何学に革新的な考え方をもたらしました．

さて，マックスウェルの方程式は『電磁双対性』と呼ばれる面白い対称性を持っています．荷電粒子が存在しないと仮定すると，ρ と $\boldsymbol{j}$ が共に零になりますが，そのとき電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E} \tag{5}$$

のように入れ換えても方程式の形は変わりません．電磁場をゲージポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ を用いて $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ のように表したとき，式 (2) と (3) はビアンキ恒等式，式 (1) と (4) が運動方程式となりますが，変換 (5) のもとで恒等式と運動方程式が入れ換わります．また，電荷の単位 e と磁荷の単位 g がディラックの量子化則 $eg = 1$ に従うため，電荷と磁荷を入れ換える変換 (5) は反転

$$e \longrightarrow \frac{1}{e} \tag{6}$$

を引き起こします．荷電粒子が存在しないと仮定したマックスウェル理論は相互作用が零の，いわゆる自由な理論であり，電磁双対性は量子論においても容易に証明することができます．しかし，荷電粒子が存在するとそれは明らかに破れています．また，非可換ゲージ理論においても一般には (5) のような対称性はありません．ただ，$\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ理論など，電磁双対性が成り立つような非可換ゲージ理論が存在することが近年分かってきました．これらはすべて相互作用を持った系であり，(6) は結合定数の反転と解釈され，双対性は強結合理論と弱結合理論の間に成り立つことになります．ある難しい問題が双対側では簡単な問題に翻訳され解けてしまうこともあり，双対性は高い有用性を持っています．同時にこの側面は双対性を理解・証明することを困難なものにしています．

4 次元の電磁双対性に対応するものは他の次元でも存在します．自由な 4 次元マックスウェル理論の電磁双対性は「アーベル双対性」として一般次元 D に拡張されます．これは $(p+1)$ 形式をゲージポテンシャルとする自由な理論と $(D-p-3)$ 形

式をゲージポテンシャルとする自由な理論の間に成り立つものであり，容易に証明できます．また，非自明な相互作用を持った系の間にも双対性が成り立つ場合があります．4 次元の電磁双対性と同様，強弱双対性という側面を持ち，有用であると同時に理解・証明することは難しい問題です．本稿の主題である『ミラー対称性』とは 2 次元の $(2,2)$ 超対称な場の理論における双対性のうち，ある条件を満たすものの総称です．また，3 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称な場の理論における双対性にも『ミラー対称性』と呼ばれるものがあります．

$D=2$, $p=-1$ のアーベル双対性は『T 双対性』とも呼ばれ，（2 次元）ミラー対称性のひな形となっています．これは「0 形式のゲージポテンシャル」，すなわち円 S^1 に値をとるスカラー場の理論の間の双対性です．自由スカラー場 X は波動方程式 $(\partial_t^2-\partial_\sigma^2)X=0$ に従います．ここに t は時間座標，σ は空間座標です．この運動方程式は $P=\partial_t X$, $W=\partial_\sigma X$ を用いて次のように書き換えられます：

$$\partial_t P=\partial_\sigma W, \tag{7}$$

$$\partial_\sigma P=\partial_t W. \tag{8}$$

この方程式は P と W の入れ換え

$$P\to W,\quad W\to P \tag{9}$$

のもとで不変です．これは運動方程式 (7) とビアンキ恒等式 (8) を入れ換えるものになっています．P と W を空間方向に積分したものはそれぞれ運動量と巻き付き数という意味を持っています．円 S^1 の半径を R とすると，これらは飛び飛びの値 l/R と Rm を持ちます．ここに l と m は整数です．従って運動量と巻き付き数を入れ換える変換 (9) が意味を持つためには半径も

$$R\longrightarrow\frac{1}{R} \tag{10}$$

のように変換しなければなりません．T 双対性の主張は「半径 R の円に値をとる自由スカラー場の理論と半径 $1/R$ の円に値をとる自由スカラー場の理論が運動量と巻き付き数を入れ換える変換のもとで等価である.」というものです．例えば，運動量 l/R，巻き付き数 Rm を持つセクターの最低エネルギーは $(l/R)^2+(Rm)^2$ ですが，これは (10) と同時に整数 l と m を入れ換えるという変換のもとで不変です．

もちろん等価性はエネルギースペクトルに限ったことではありません．面白い例として，理論を半空間 $\sigma\leq 0$ の上に定式化するときの境界条件を考えてみましょう．代表的な境界条件としてノイマン条件 $\partial_\sigma X|=0$ とディリクレ条件 $\partial_t X|=0$ があります（$\mathcal{O}|$ は境界での $\mathcal{O}$ の値を意味します）．これらは変換 (9) のもとで入れ換わります．ディリクレ条件は $X|$ が半径 R の円のどこにいるか？という一つのパラメーターを持ちますが，ノイマン条件にはそのようなパラメーターがなく，一対一の関係が崩れているように見えます．しかし実はノイマン条件のもとでは境界上に円上の平坦 $U(1)$ ゲージ場を置くことができ，その選択が一つパラメーターを与えるのです．そしてその平坦ゲージ場のモデュライ空間 $H^1(S^1,U(1))$ こそが半径 $1/R$ の円，すなわち双対理論の円となるのです．2 次元場の理論の境界条件は『D ブレーン』とも呼ばれています．今考えている例ではノイマン条件は「D1 ブレーン」，ディリクレ条件は「D0 ブレーン」です．D は「ディリクレ」から，その後の数字は $X|$ の動き得る空間の次元からきています．上に見たことはこの言葉を用いると「T 双対性のもとでは半径 R の円に巻き付いた D1 ブレーンは半径 $1/R$ の円の一点にある D0 ブレーンに変換されるが，その際，D1 ブレーンに載っている平坦ゲージ場が D0 ブレーンの位置に対応する」と言うことができます．

上記のことは「円 S^1」を n 個の円の積，すなわち「n 次元トーラス T^n」に置き換えても同じように成り立ちます．この場合 T^n の S^1 因子の幾つかに T 双対性を適用することができます．その選択肢が複数あるため複数の T 双対性が存在することになります．また，T^n に値をとる自由スカラー場の理論と任意の理論との直積をとってきても，T 双対性を T^n 部分に適用することで双対

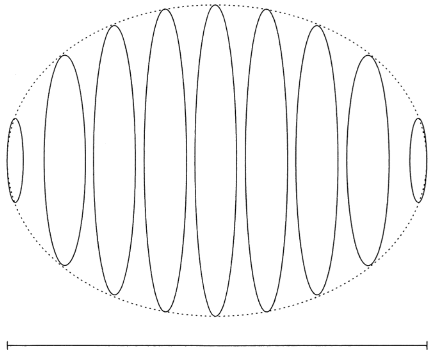


図１　球面 S^2.

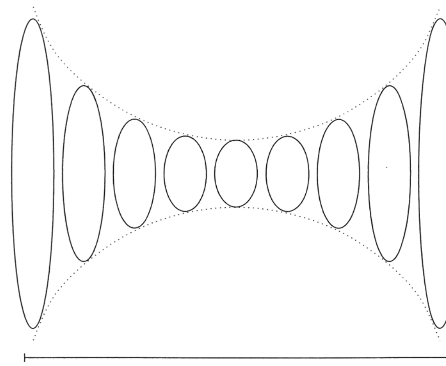


図２　結合ラッパ.

性が成り立ちます．

さて，相互作用を持つ２次元の場の理論にもＴ双対性のようなものがあるでしょうか？ 相互作用の入った系としては非自明なポテンシャルの影響下にあるスカラー場の理論が挙げられます．また，円やトーラスでなく，平坦ではないリーマン多様体に値をとるスカラー場の理論，いわゆる非線形シグマ模型を考えることもできます．そこでは標的空間の曲率の大きさが相互作用の大きさに比例します．曲率と長さは反比例するので，もし(10)のように長さを反転するような双対性があった場合，それは強弱双対性の側面を持つことになり面白そうです．

最も簡単な例として２次元球面 S^2 を標的空間とする非線形シグマ模型を考えてみましょう．球面 S^2 は図１に示したように，線分上に半径の異なる S^1 が並んだものと見ることができます．線分の真ん中あたりで半径は最大となり，中心から離れていくにつれ半径は減少し，両端で半径が零となります．このとき，各 S^1 にＴ双対性を適用してみたらどうなるでしょうか？ 安直に考えると双対側では線分の真ん中あたりで半径は最小となり，中心から離れていくにつれ半径は増大し，両端で半径無限大となりそうです．全体としては図２に描いたように二つのラッパを根元でくっつけたような幾何が得られます．この「球面 S^2 と結合ラッパの双対性」は果たして正しいでしょうか？ 球面 S^2 は回転対称性を持ち，特にそれぞれの S^1 を回すようなものから S^1 方向の運動量保存則が導かれます．一方ラッパには両端に大きな穴ができているので S^1 への巻き付き数が保存しています．このことは運動量と巻き付き数を入れ換えるという双対性の性質とつじつまが合っているように見えます．しかし球面 S^2 は単連結であるため S^1 方向の巻き付き数は保存しませんが，ラッパには S^1 方向の回転対称性があり，運動量が保存しているように見えます．また，球面 S^2 はコンパクト空間でエネルギースペクトルは離散的ですが，ラッパは非コンパクトなので連続スペクトルが予想されます．これらのことは双対性が成り立っていないことを示唆しています．実は $(2,2)$ 超対称性がある理論においては，ある重要な量子補正がラッパ側に存在し，それによりこれらの問題が解決され，双対性が成り立つことが示せます．この双対性こそがミラー対称性の最も基本的な例であり，より一般のミラー対称性の種となるものなのです．

ここで超対称性について簡単に紹介しておきましょう．場の理論の力学変数はスカラー場やゲージ場などのボゾニックなものと，スピノル場などのフェルミオニックなものがあります．超対称性とはボゾニックな変数とフェルミオニックな変数を入れ換えるような変換で，２回施すと時空の並進となるような対称性のことです．超対称性の生成子は超電荷と呼ばれます．各次元の超対称性はだいたい超電荷の個数で分類されます．「$\mathcal{N}=$ 何々超対称性」というときは基本単位の $\mathcal{N}$ 倍の個数の超電荷を持った超対称性を意味します．次元によっ

てはローレンツ群作用の観点から二つの “$\mathcal{N}$” が必要です．2次元 (2,2) 超対称性は二つの右巻き超電荷 $Q_-, \overline{Q}_-$ と二つの左巻き超電荷 $Q_+, \overline{Q}_+$ で，反交換関係 $\{Q_\pm, \overline{Q}_\pm\} = H \pm P$, $\{Q_\pm, \overline{Q}_\mp\} = 0$, $Q_\pm^2 = \overline{Q}_\pm^2 = 0$, を満たすものによって生成されます．ここに $\overline{Q}_\pm$ は $Q_\pm$ のエルミート共役，H と P は時空並進の生成子です．また，ローレンツ群と交換し超電荷を回転するような対称性のことを「R 対称性」と呼びます．2次元 (2,2) 超対称性にはベクトル $U(1)$ と軸性 $U(1)$ の二つの R 対称性があり，それぞれの生成子 F_V と F_A は超電荷を $[F_V, Q_\pm] = -Q_\pm$, $[F_A, Q_\pm] = \mp Q_\pm$ のように回します．線形結合

$$Q_A = \overline{Q}_+ + Q_-, \quad Q_B = \overline{Q}_+ + \overline{Q}_- \quad (11)$$

を考えてみましょう．$(Q, F) = (Q_A, F_V)$ もしくは (Q_B, F_A) は次の交換関係を持ちます．

$$Q^2 = 0, \quad [F, Q] = Q, \quad \{Q, Q^\dagger\} = 2H. \quad (12)$$

これは調和解析でよく目にするものです．例えば向き付けられたコンパクト・リーマン多様体の微分形式では (外微分, ラプラシアン, 次数) が (Q, H, F) と同じ代数を持ちます．この関係式を用いると，調和解析と同様に (i) エネルギー（H の固有値）が非負であること，(ii) 零エネルギー状態はすべての超電荷で不変な「超対称状態」であり，その空間は Q-コホモロジー群と同型であること，(iii) $\mathrm{Tr}\,(-1)^F \mathrm{e}^{-\beta H}$ が理論の変形で不変であること，がいえます．(iii) はオイラー標数に対応するもので「ウィッテン指数」と呼ばれています．

(2,2) 超対称性を持つ2次元の場の理論の例としてケーラー多様体 (X, g) を標的とする非線形シグマ模型や，ランダウ・ギンツブルグ（LG）模型があります．これらの模型は標的に値をとるスカラー場 ϕ とそれに対応するディラック・フェルミオン ψ を力学変数として持ちます．非線形シグマ模型の作用函数は計量 g によって定まる ϕ と ψ の運動項とリーマン曲率によって定まる ψ の4乗項の和です．LG 模型では運動項に加えて「超ポテンシャル」と呼ばれる正則函数 W から定まるポテンシャル $U = |W'(\phi)|^2$ の項と湯川項 $W''(\phi)\psi\psi$ があります．標的の局所複素座標を用いて表した場 $(\phi^i, \psi_\pm^i)$ に対する超対称性変換は以下のようになります：

$$\delta\phi^i = \epsilon_+ \psi_-^i - \epsilon_- \psi_+^i, \quad (13)$$

$$\delta\psi_\pm^i = \pm\sqrt{-1}\,\overline{\epsilon}_\mp (\partial_t \pm \partial_\sigma)\phi^i + \epsilon_\pm F^i. \quad (14)$$

$\epsilon_\pm$ と $\overline{\epsilon}_\pm$ は変換パラメーターで，F^i は計量 g や超ポテンシャル W によって定まるものです．非線形シグマ模型の超対称状態の空間は X のコホモロジー群 $\oplus_{p,q} H^{p,q}(X)$ と同型で，$q - p$ がベクトル R 電荷となり，ウィッテン指数は X のオイラー数と一致します．もし X がカラビ・ヤウ多様体の場合は軸性 R 電荷も保存しており，$p + q - n$ がその値となります（ここに n は X の複素次元）．LG 模型の超対称状態の空間も超ポテンシャル W によって定まるコホモロジー群と同型となり，ウィッテン指数は W のミルナー数と一致します．

各々の (2,2) 超対称場の理論は「シンプレクティック幾何の構造」と「複素幾何・代数幾何の構造」を内包しており，それぞれ (11) に挙げた Q_A と Q_B によって切り出されます．一つの例を挙げると，局所演算子の Q_A-コホモロジー類全体（Q_B-コホモロジー類全体）は A 型カイラル環（B 型カイラル環）と呼ばれる環をなし，シンプレクティック幾何的な（複素・代数幾何的な）意味を持ちます．例えば (X, g) を標的とする非線形シグマ模型の A 型カイラル環はケーラー多様体 (X, g) をシンプレクティック多様体 (X, ω) と見たときの量子コホモロジー環と一致します．その B 型カイラル環は多重正則ベクトル場のコホモロジー環 $H^\bullet(X, \wedge^\bullet T_X)$ となります．また，複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^n$ を標的とし，多項式 W を超ポテンシャルとして持つ LG 模型の B 型カイラル環はヤコビ環 $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/(\partial_1 W, \ldots, \partial_n W)$ と一致します．もう一つの例として D ブレーンを考えることができます．Q_A と $Q_A^\dagger$ を保つものは「A ブレーン」，Q_B と $Q_B^\dagger$ を保つものは「B ブレーン」と呼ばれています．Q_A と $\overline{Q}_A^\dagger$（Q_B と $\overline{Q}_B^\dagger$）に

よる超対称変換は変換パラメーターに $\epsilon_- = \overline{\epsilon}_+$ $(\epsilon_- = -\epsilon_+)$ なる条件をつけたものであり，(13) においては

$$\delta\phi^i = \epsilon_+^1(\psi_-^i - \psi_+^i) + \sqrt{-1}\,\epsilon_+^2(\psi_-^i + \psi_+^i)$$
$$(\delta\phi^i = \epsilon_+(\psi_+^i + \psi_-^i)) \tag{15}$$

となります（ここに ϵ_+^1 と ϵ_+^2 は ϵ_+ の実部と虚部）．非線形シグマ模型において，標的 X の部分多様体 M に巻き付いたDブレーンを考えてみましょう．スカラー場 ϕ に対しては，M に接する方向にノイマン条件，M と直交する方向にディリクレ条件を課すのが標準的です．これに対応してAとBに共通な超対称性から $(\psi_+ + \psi_-)|$ が M に接し $(\psi_+ - \psi_-)|$ は M に直交するという条件が出ます．一方 $\delta\phi|$ は M に接していますから，境界条件が Q_A と $\overline{Q}_A^\dagger$（Q_B と $\overline{Q}_B^\dagger$）で不変であるためには X の複素構造 J が M の接ベクトル空間と直交ベクトル空間を入れ換えること（M の接ベクトル空間を不変に保つこと）が必要であることが(15)から分かります．すなわち，Aブレーンは (X,ω) のラグランジュ部分多様体，Bブレーンは (X,J) の複素部分多様体でなければなりません．一般にDブレーンの全体はある種の圏を構成しますが，上記のような考察を進めていくと非線形シグマ模型におけるAブレーンの圏が (X,ω) の深谷圏となること，Bブレーンの圏が (X,J) の $\overline{\partial}$ 超接続の圏（(X,J) が代数多様体の場合，それは連接層の導来圏と同値）となることが分かります．また，LG模型ではAブレーンの圏は超ポテンシャル W により統制された深谷圏，Bブレーンの圏は W の行列分解の圏となります．

ミラー対称性とは二つの $(2,2)$ 超対称理論の間の双対性で，超電荷 Q_- と $\overline{Q}_-$ を，R対称性 F_V と F_A をそれぞれ入れ換え，Q_+ や $\overline{Q}_+$ は不変に保つようなもののことです．カラビ・ヤウ多様体 X と Y を標的とする非線形シグマ模型が互いにミラーであるとすると，超対称状態のベクトルR電荷 $q-p$ と軸性R電荷 $p+q-n$ が入れ換わるので，状態数をプロットしたホッジ・ダイヤモンドが反転することになります：$h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y)$．より重要なことは $Q_A = \overline{Q}_+ + Q_-$ と $Q_B = \overline{Q}_+ + \overline{Q}_-$ が入れ換わることです．このことは一方のシンプレクティック幾何構造が双対側の複素・代数幾何構造に対応することを意味します．例えば，一方のA型カイラル環と双対側のB型カイラル環が一致し，また，一方のAブレーンの圏と双対側のBブレーンの圏も同値となります（これは「ホモロジカル・ミラー対称性」と呼ばれています）．カラビ・ヤウ多様体 X と Y が互いのミラーであるとすると X の量子コホモロジー環と Y の多重正則ベクトル場のコホモロジー環が一致し，X の深谷圏と Y の連接層の導来圏が圏同値になります（X と Y を入れ換えても成立）．カラビ・ヤウでない多様体を標的とする非線形シグマ模型とLG模型の間にミラー対称性が成り立つ場合もあります．そのときは標的 X の量子コホモロジー環と超ポテンシャル W のヤコビ環が一致し，X の深谷圏と W の行列分解の圏の間に圏同値が成り立ちます．また，X の連接層の導来圏と W により統制された深谷圏も同値です．

ミラー対称性の自明な例としてトーラス T^{2n} の間のT双対性があります．実2次元の長方形トーラスで半径 (R_1, R_2) を持つものを考え，縦方向にのみT双対性を適用してみましょう．すると半径 $(R_1, 1/R_2)$ の長方形トーラスが得られます．二つのトーラスの座標 (X_1, X_2) と $(X_1^\vee, X_2^\vee)$ は(9)により，$X_1 = X_1^\vee$，$\partial_t X_2 = \partial_\sigma X_2^\vee$，$\partial_\sigma X_2 = \partial_t X_2^\vee$ という関係にあります．複素座標 $\phi = X_1 + \sqrt{-1}\,X_2$ と $\phi^\vee = X_1^\vee + \sqrt{-1}\,X_2^\vee$ の関係は

$$\begin{aligned}(\partial_t + \partial_\sigma)\phi &= (\partial_t + \partial_\sigma)\phi^\vee,\\ (\partial_t - \partial_\sigma)\phi &= (\partial_t - \partial_\sigma)\overline{\phi}^\vee,\end{aligned} \tag{16}$$

です．フェルミオンは名前の変更のみ $\psi_+ = \psi_+^\vee$，$\psi_- = \overline{\psi}_-^\vee$ とします．このとき，(16)と超対称変換(14)を照らし合わせると，変換パラメーターが $\epsilon_+ \leftrightarrow -\overline{\epsilon}_+$ のように変わっていることが分かります．これは $Q_- \leftrightarrow \overline{Q}_-$ を意味し，この双対性がミラー対称性であることが分かります．このことは最初のトーラスの複素構造が R_1/R_2，シンプレク

ティック構造を定める面積が R_1R_2 であるのに対し，双対側の複素構造が R_1R_2，面積が R_1/R_2 であることからも分かります．この例でDブレーンがどうなっているかを見てみましょう．まず，縦方向の円に巻き付いているD1ブレーンを考えます．これはラグランジュ部分多様体であり，Aブレーンです．これは縦方向のT双対性のもと横方向にも縦方向にも一点のD0ブレーンになります．これは複素部分多様体で，確かにBブレーンとなっています．横方向の円に巻き付いたD1ブレーンもまたAブレーンですが，これはトーラス全体に巻き付いたD2ブレーン（これもまたBブレーン）に写されます．このようにAブレーンとBブレーンの間の双対性が成り立っており，さらに詳しく見ていくとホモロジカル・ミラー対称性を証明することができます．高次元のトーラス T^{2n} でも n 個の方向のT双対性がミラー対称性となる場合があります．また，n 次元多様体 B の上に n 次元トーラスが乗っている $2n$ 次元のファイバー束においても，ファイバー方向のT双対性がミラー対称性となる場合があります．それは全空間がケーラー多様体となり，各ファイバーがそのラグランジュ部分多様体となっている場合です．ファイバーに巻き付いたDn ブレーンの双対がD0ブレーンとなることに注意しましょう．するとミラー多様体をラグランジアン・ファイバーに巻き付いたAブレーンのモデュライ空間として再構築できることが分かります．これがストロミンジャー・ヤウ・ザスロフ（SYZ）の考え方です．

さて，「球面 S^2 と結合ラッパの双対性」の問題に戻りましょう（図1と図2を参照）．球面 S^2 は1次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^1$ と見ることもでき，これはケーラー多様体です．従って $S^2 = \mathbf{CP}^1$ を標的とする $(2,2)$ 超対称な非線形シグマ模型を考えることができます．前に行ったのはラグランジアン・S^1 ファイバーに関するT双対性であり，これを $(2,2)$ 超対称理論に適用するとミラー対称性となっているはずです．ただ，この S^1 ファイブレーションは線分の両端で退化しており，その効果を捉える必要があります．前に，双対側の S^1 ファイバーの半径がそこで無限大になり，穴が空いて「結合ラッパ」ができること，この双対性は部分的には整合的だが，いくつかの重大な問題を抱えていること，を見ました．これは $(2,2)$ 超対称理論でもそのまま当てはまります．さて，この双対性は完全に駄目なのでしょうか？ 実は見落としていた量子効果があり，それによって正しい双対性の主張ができるのです．すなわち，ファイブレーションの退化は双対空間に穴を空けるだけではなくそこに超ポテンシャルを生成するのです！ ラッパの複素座標を Y とします：実部は水平方向の座標，虚部が双対 S^1 ファイバーの座標で，周期性 $Y \equiv Y + 2\pi\sqrt{-1}$ を持つものとします（実はくりこみの効果により $\mathrm{Re}(Y)$ は実数直線全体に値をとることになります）．すると生成される超ポテンシャルは

$$W = \mathrm{e}^{-Y} + \mathrm{e}^{Y} \tag{17}$$

と表されます．これにより前に見た問題が解決されます：(17) は双対側のファイバー方向の回転対称性を破り，また両端で急激に切り立ったポテンシャル $U = |\mathrm{e}^{-Y} - \mathrm{e}^{Y}|^2$ により理論は離散スペクトルを持つことになります．よって「$\mathbf{CP}^1$ を標的とする $(2,2)$ 超対称な非線形シグマ模型のミラー双対理論は $\mathbf{C}^\times$ を標的とし，(17) を超ポテンシャルとして持つLG模型である」と主張することができます．これはヴァッファ氏と筆者により「線形シグマ模型」と呼ばれる簡単な量子ゲージ理論を用いて証明されました（K. Hori and C. Vafa, "Mirror Symmetry," hep-th/0022222）．この証明はトーリック多様体，その中の超曲面やそれらの完全交叉などにほとんどそのまま適用され，それらのミラー双対が導出されます．

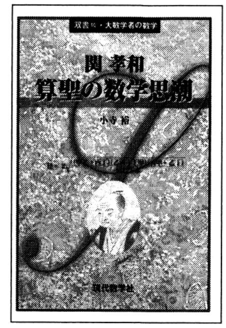
上記のミラー対称性はSYZ的な見方によっても導くことができます．$(2,2)$ 超対称理論を帯上に定式化するとき，AブレーンもしくはBブレーンを境界条件として採用すれば，状態空間には $Q_A, Q_A^\dagger$ もしくは $Q_B, Q_B^\dagger$ が超電荷として作用します．このとき，代数関係式 (12) のうち $Q^2 = 0$ が破れることがあります．この破れはAブレーンの場合に

はラグランジアン交叉フレアー理論においてよく知られていたもので，円盤からの正則写像のインスタントンに起因しています．Bブレーンの場合には超ポテンシャルから簡単に出てきます．この破れを $\mathbf{CP}^1$ のラグランジアン・S^1 ファイバーに対し観測してみると双対側で超ポテンシャル (17) がなければならないことが結論できます．この見方は2002年国際数学者会議における筆者の講演において示され，その後数学者たちによって一般化されています．

以上，マックスウェル方程式を書くことから始めてミラー対称性について少々駆け足で述べてきました．導入部で電磁双対性に触れたのは単なるアナロジーのためだけではなく，実はミラー対称性と密接なつながりを持っているからです．この関係はこれまでにも分かっている部分がありますが，今後の研究でさらに面白いことが明らかになるでしょう．また，これまで特に強調はしませんでしたが，これらの双対性は「超弦理論」において重要な役割を担っています．特にT双対性やミラー対称性は超弦理論の研究の中から発見されました．超弦理論は1次元の「基本弦」や様々な次元の「ブレーン」を登場人物とする力学系ですが根源的な定式化の方法は未だ見つかっておらず，現状では弦やブレーンの上の様々な次元の場の理論をツギハギすることによって調べられています．この「ツギハギ」を実行するのが双対性なのです．

物理学の一つの課題として量子論と一般相対論を統一的に含む理論を構築することがあり，超弦理論はそのための有力な手がかりであると思われています．そのような理論は量子論や一般相対論とともに生まれ，独自に発展してきた様々な数学分野を「統一」するような言葉で書かれるのではないかと筆者は感じています．超弦理論から生まれたミラー対称性が「シンプレクティック幾何」と「複素幾何・代数幾何」を関係づけていることは何を意味するのでしょうか．

（ほり・けんたろう，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）



関孝和 算聖の数学思潮

小寺裕著，四六判，180 頁，本体 1800 円，現代数学社

この書を取って先ずびっくりしたのは，「算聖」という昔懐かしい呼称である．関孝和は，17 世紀末の江戸時代に生きた偉大な数学者で，中国伝来の天元術を発展させ傍書法（あるいは点竄術）という代数学の表記法を用いて，連立代数方程式の解法においてめざましい成果をあげた．江戸時代を通じて，関流という和算の流派の始祖ということで弟子筋から「算聖」と呼ばれていたのであろうが，今日ではまったく用いられていない呼称である．

もう一つ書名で興味をそそられたのは「数学思潮」という言葉である．「思潮」というのは，ある時代の社会にみられる思想の傾向を意味する言葉であり，個人の思想をいう言葉ではない．しかし，関孝和の数学哲学について示唆が与えられるのではないかとの期待を胸に本書をひもといたのであるが，それに関しては直接の言及はなかった．最近出版された徐澤林著『建部賢弘的数学思想』（中国語，科学出版社，2013）では，関の高弟，建部賢弘が『大成算経』（1711）の巻之四（三要），巻之十六（両儀）あるいは『綴術算経』（1722）において述べた彼の数学観，数学研究と数学者の心理の関係などについて論じている．建部と比較して関孝和がどのような数学観を持っていたのか，興味をそそるところである．

本書の跋文には，漢文で「著為一書名曰関孝和之数学」とあるので，「関孝和の数学」が著者の意図した書名だったのかも知れない．内容もそれに合致している．

関の著作と伝えられるのは，『関孝和全集』によると 24 点あるが，著書と呼べるものは，生前の『発微算法』（1674）と没後に弟子が刊行した『括要算法』（1712）の 2 本しかない．他の多くは，『大成算経』の原稿で，関が書きおろし建部兄弟に与えたのであろう．

本書の章立ては，1．発微算法から，2．解伏題之法から，3．研幾算法から，4．括要算法から，5．十字環問題である．その順に，コメントしよう．

関の処女作『発微算法』は，沢口一之の著した『古今算法記』（1671）の遺題 15 問に解答を与えたが，解答の数値が満たす代数方程式が，解答として与えられているだけである．どのようにしてその方程式を導くのかは，弟子の建部賢弘が『演段諺解』（1685）で傍書法を用いて初めて明らかにした．本書でも，『演段諺解』に従って第 1 問と第 3 問について解の満たす代数方程式（6 次および 27 次）を導き出している．

『解伏題之法』（1683）は，『大成算経』巻之十七（全題解）の原稿であったものが，独立して，『解見題之法』（1685 頃），『解隠題之法』（1685 頃）とともに『三部抄』として関流の中で伝わってきた．その重要性は，行列式，終結式を世界で初めて書き表した所にある．本書でも注意しているように，『解伏題之法』の中で，関は 5 次の行列式の展開までも述べているが，5 次の場合は正しくない．その後，井関知辰の『算法発揮』（1690）や『大成算経』巻之十七では，ファンデルモンド流に行列式が正しく定義されるようになった．

『研幾算法』（1683）は，建部賢弘の処女作であるが，その中には，先生の関から教わったことも書いてある．本書で取り上げているのは，5 角形の問題である．求める直径の 2 乗を x として，x の満たす 7 次方程式が，30 ページにわたって記載されているのは圧巻である．この長い方程式を見ても，その意味を理解することは困難であり，方程式を書き下すことに意味を見出した和算家たちの価値観は，今日の数学者には理解しがたい（二十八宿の第 3 文字「氐」（てい）が「氏」（し）と誤植されており，気になった）．

『括要算法』からは，剰一術，円周率，ベルヌーイ数，角術の 4 つの話題が取り上げられている．円周率を 12 桁求めた関の増約術については，『括要算法』に記載されているが，建部賢弘は関の増約術を繰り返し利用して，円周率の計算の効率を著しく改良し，将軍吉宗に献呈した『綴術算経』の中で，この発見を誇らしげに記述している．本書にはこの他にも，大阪の和算家たちの書いた「宅間流円理」の円周率の計算など興味深い記事もある．

十字環問題を，関孝和は『求積』で解いたが，関孝和以外の和算家たちの業績についても本書では述べてある．≪関孝和の数学≫の紹介にとどまらず，著者の意図した≪関孝和ワールド≫への案内書としての役割も十分に果たしているといえよう．

森本　光生（四日市大学関孝和数学研究所）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

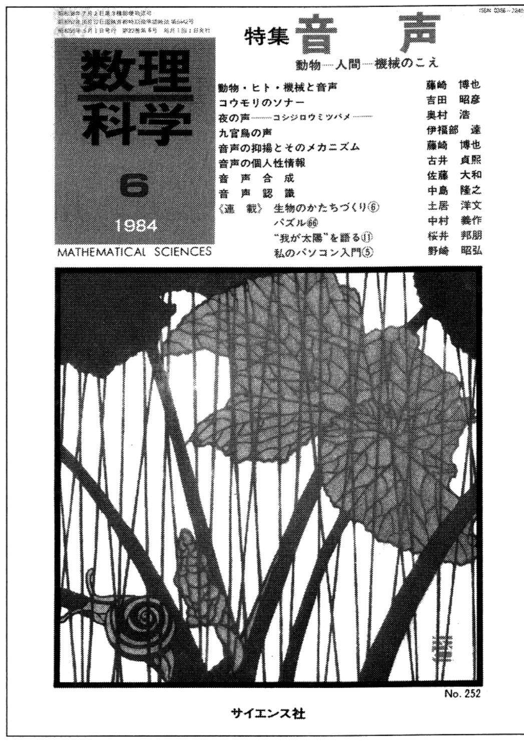
佐藤 大和

1984年6月号

「音声合成」が書かれた1980年代初めの頃，私たちの研究グループが所属する電電公社（現NTT）電気通信研究所では，PARCORなど現在の携帯電話の音声処理の基礎となる技術，線形予測符号化が発明され，技術的発展を遂げつつありました．その頃米国のMITでは，J. Allen博士が中心となって英語のテキストを“朗読”するtext-to-speechシステムの開発が進んでいることを知り，私たちも日本語（漢字かな混じり文）で同様の朗読システムを作ろうということになり，1年ほどかけて完成させました．その内容を紹介したのが30年前の「音声合成」です．

私を含めて担当した4人の研究者は皆理系学部出身の人間でした．“朗読システム”を創り上げるには，言語学，日本語文法，アクセントやイントネーションを含む日本語音声学など，いわゆる文系の学問の知識が必要なのですが，こうした知識には疎かったため，国立国会図書館や国立国語研究所などに通うなどして文献を集めたのも懐かしく思い出されます．入社当時上司から「これからは人間の研究が大切だ」と言われて従事することになった“音声合成”の研究は，人文科学分野の情報処理のはしりだったのでしょう．現在では人文科学のあらゆる分野において，研究のためコンピュータが必須になっている状況を見ると隔世の感を禁じえません．4人の担当者は，その後皆，人間に関わる分野と情報処理の狭間の領域で活動する研究者として育っていきましたが，これも若い頃のこの開発経験によるものかもしれません．

最近の音声合成はどうなっているでしょう．30年前当時に比べると合成音の品質は著しくよくなってきました．その原因の一つは，連続音声を組み上げる音声要素（単位）や言語処理などが，膨大な音声言語データに基づく，いわゆるcorpus-orientedな手法に依っているからのように思われます．多様な音声事象を広くカバーする音声データの中から，最も相応しいと推定される要素を選択して利用するなどの手法です．コンピュータの性能の著しい発展に支えられて，こうした音声合成の技術も進化してきましたが，その反面，言語音声の諸事象を具体的に明らかにする研究に関しては必ずしも十分ではなかったように思われます．近年，英語，日本語をはじめ世界の主要諸言語の音声／言語コーパスの構築が進んでいます．こうしたコーパスの情報処理に基づく分析研究から，文系と理系の垣根を越えた音声言語学の新たな領域が開かれていくのではないかと期待しています．



（さとう・ひろかず，東京外国語大学アジア・アフリカ言語文化研究所）

リレー連載

数学的な感覚の探求 最終回

思考法の源を探る

「集合と位相」入門の入門

川﨑　徹郎

1. はじめに

大学の数学科の典型的な授業科目として「集合と位相」があります．基本的な微積分，線形代数に続く入門科目として２年次に設定することの多い科目だと思います．目標は，数直線と座標平面（もちろん n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ でやりますが）を位相空間として理解することです．そのような想定で，先生は学生に何を期待しているか，そして，どのような絶望に出会うかを想像してみました．

2. 集合と論理

位相というものを数学的に扱うためには，どうしても集合論の理解が必要です．高校で扱う有限集合の共通部分，合併集合，補集合の話では不十分で，無限個の無限集合をどう扱うかという本当の集合論（単なる集合でなく）が必要なのです．

それは，ある意味，びっくりするほど難しいものなのですが，その難しい部分は無視して，成り立つやさしいことだけを紡ぎ合わせて，その先の議論，位相に利用しようというのです．この，難しいことは無視して，やさしいことだけを，という精神はあらゆるところに出てきます．決して，ごまかそうというわけではありません．正しいことをいい，正しいかどうかわからないことはいわないという考えです．

さて，まず，よく用いる集合をあげましょう．

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \text{“自然数全体のつくる集合”}\\ &= \{1, 2, 3, \cdots\},\\ \mathbb{Z} &= \text{“整数全体のつくる集合”}\\ &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\},\\ \mathbb{Q} &= \text{“有理数全体のつくる集合”}\\ &= \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\},\\ \mathbb{R} &= \text{“実数全体のつくる集合”} = \text{数直線}.\end{aligned}$$

これらには包含関係があります．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して，n 次元数ベクトル全体も集合です．

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^n &= \text{“有理数を成分とする } n \text{ ベクトル全体のつくる集合”},\\ \mathbb{R}^n &= \text{“実数を成分とする } n \text{ ベクトル全体のつくる集合”}\\ &= n \text{ 次元ユークリッド空間},\end{aligned}$$

また，はじめて学ぶ方には抵抗があるかもしれませんが，ベクトルを集めたものも集合です．

これらのよくわかった集合に対して，全くわから

ない集合も出てきます．しばしば添え字集合といわれるもので，記号 Λ で表すことが多いです．どんなときに出てくるかというと，例えば，平面の部分集合がたくさんあります．それを $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ $(\lambda \in \Lambda)$ としますという具合です．これは，一般的に無限個の集合（部分集合）を書き表すのに，表しようがないから，λ が Λ 全体を動くときの U_λ たち，と書き表すわけで，集合 Λ の素性は全く問題とせず，ただ，範囲のはっきりした集合ですというだけのものです．

このような表し方は極めて有用です．次のような集合が作れるからです．

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in U_\lambda \ (\exists \lambda \in \Lambda)\}.$$

この $\cdots (\exists \lambda \in \Lambda)$ という記号は $\cdots$ となるような λ が少なくとも 1 つ存在するという意味です．ですから，この集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は少なくともどれか 1 つの U_λ に入っている $\boldsymbol{x}$ の全体というわけです．この集合は U_λ たちの**合併集合**といいます．例えば，$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ のとき，A は U_λ たちによって覆われるといいます．これは**被覆**といわれる，位相数学で非常に重要な概念です．

もう 1 つ，U_λ たちの**共通部分**を

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in U_\lambda \ (\forall \lambda \in \Lambda)\}$$

と定めます．$\cdots (\forall \lambda \in \Lambda)$ という記号はすべての λ に対して $\cdots$ が成り立つという意味です．共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は，すべての U_λ に入っている $\boldsymbol{x}$ 全体のつくる集合です．

具体的に共通部分がどうなるか調べてみましょう．1 次元の場合でも，いろいろです．例えば，開区間の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ は空集合です．どのような $t > 0$ に対しても，十分大きな n を選べば，$\dfrac{1}{n} < t$，すなわち，$t \notin \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ だからです．同じような理由で，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ は 1 点 0 だけからなる集合です．また，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right)$ は閉区間 $[0, 1]$ です．もちろん，無限個の開区間の共通部分が開区間になることもあるわけで，要するに，開区間の共通部分はいろいろです．

ところが開区間の合併では，変なことは起きません．例えば，決して，閉区間にはなりません．すなわち

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) = [\alpha, \beta]$$

は絶対成り立たないのです．実際，成り立ったとすると，α は左辺に属します．よって，ある λ に対し，$\alpha \in (a_\lambda, b_\lambda)$ ですが，そのとき，$a_\lambda < \alpha < b_\lambda$ ですから，$\dfrac{a_\lambda + \alpha}{2}$ は (a_λ, b_λ) に属します．したがって，右辺は α より小さい点を含むことになり，矛盾です．

このような議論が，位相というものを理解する糸口になります．

3. 可算集合と非可算集合

位相を学ぶ上で，どうしても知っていなければならない事実として，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ と実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の大きさの違いに関することがあります．実数のほうが，比較にならないくらい，元が多いのです．このことを数学的には濃度が大きいといいます．

きちんとした議論のためには，少し準備が必要です．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と $1:1$ 対応のある集合を**可算無限集合**といいます．$\mathbb{N}$ と集合 A とが $1:1$ 対応しているとき，$n \in \mathbb{N}$ に対応するものを $a_n \in A$ と表すならば，A は

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

と表されます．ようするに，A の元に番号をつけて 1 列に並べることになります．このように，すべての元に番号をつけることが可能な集合を可算無限集合というわけです．例えば，$\mathbb{Z}$ は $\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \cdots\}$ とすべての元を 1 列に並べることができるから，可算無限集合です．では，$\mathbb{Z}$ よりずっと多い $\mathbb{Q}$ ではどうでしょうか．例えば，分母が n のものだけ並べてしまうと，それだけで無限個あって，すべてに番号をふること

ができません．しかし次の表のように

0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}$	$-\frac{13}{6}$	$\frac{13}{6}$

$\cdots$　$\vdots$　$\ddots$

のように斜めに数えて番号をふれば，有理数すべてを１列に並べることができます．よって，$\mathbb{Q}$ も可算無限集合です．

ところが，$\mathbb{R}$ は可算集合でないのです．これは有名な**カントールの対角線論法**という議論で証明することができます．開区間 $(0,1)$ が可算でないことを示せば十分です．$(0,1)$ が可算であるとして矛盾を導きます．

$$(0,1) = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$$

と番号付けられたとします．各 n に対し，t_n を十進小数展開をします．

$$t_n = 0.s_1 s_2 s_3 \cdots.$$

小数第 n 桁に注目して，s_n が $0,1,2,3,4$ なら $u_n = 8$ とし，$5,6,7,8,9$ ならば，$u_n = 2$ とします．すべての n に関してこれを行えば，2 と 8 からなる数列 $\{u_n\}$ が定まります．そこで小数

$$t = 0.u_1 u_2 u_3 \cdots$$

を考えてみましょう．$t \in (0,1)$ ですから，ある n に対し，$t = t_n$ でなければならないのです．ところが，t と t_n は小数第 n 桁が違うので，これは矛盾です．これで証明の完成です．

以上の事実を，$\mathbb{R}$ は**非可算集合**である，または，$\mathbb{R}$ の濃度は可算無限濃度より大きい，といいます．また，$\mathbb{R}$ と $1:1$ 対応のある集合を**連続濃度**であるといいます．

4. 距離空間と位相

一般の距離空間で論ずることもできますが，ここでは，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X で議論をします．今後，考える集合はすべて X の部分集合だとします．$\mathbb{R}^n$ の距離 d は通常のユークリッド距離です．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

と定めます．これは通常の距離の公理

(D₁) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$,

(D₂) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(D₃) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,

(D₄) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geqq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$

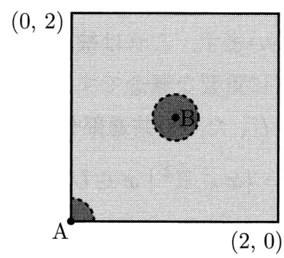
を満たします．

位相を定めるために ε 近傍を考えます．$\varepsilon > 0$ に対し，点 $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{\varepsilon}$ **近傍** $N(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ とは

$$N(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in X \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\}$$

とおきます．すなわち，$\boldsymbol{x}$ からの距離が ε より小さい X の点全体です．

例えば，次の図は $X = [0,2] \times [0,2]$ のときの，点 $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(1,1)$ の ε 近傍です．



ε 近傍があると開集合を定義することができます．すなわち，X の部分集合 U が**開集合**であるとは，X のいかなる点 $\boldsymbol{x}$ に対しても，ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$N(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset U$$

が成り立つときだとします．このことを「X の点 $\boldsymbol{x}$ の十分近くの点は U に属する」といいます．その通りだと思いませんか．そして，このことが，U のすべての点 $\boldsymbol{x}$ に対しても成り立つ，というのです．もちろん，このとき，$\varepsilon > 0$ は $\boldsymbol{x}$ の位置によって変わります．

これにより，X の部分集合は開集合であるか，そうでないかが決まります．そこで，X の部分集

合のうちで，開集合だけを集めて得られる集合族 $\mathcal{O}$ を考えることができます．この $\mathcal{O}$ を**位相**というのです．

これが位相の定義ですが，これだけでは位相を理解したとはいえません．ただ，議論の始めは定義しかありませんから，手探りで進んでいきましょう．

まず最初に，位相 $\mathcal{O}$ の満たす性質を述べます．それは位相の公理といわれるものです．

$(\mathbf{O_1})$　$\emptyset, X$ は開集合．

$(\mathbf{O_2})$　U, V が開集合ならば $U \cap V$ も開集合．

$(\mathbf{O_3})$　U_λ たちが開集合ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ も開集合．

これらの条件の開集合を，$\mathcal{O}$ の元（に属する集合）と書きかえてもその意味するところは同じです．距離空間より一般な位相空間の理論を学ぶとき，その出発点はこの公理で，$(\mathrm{O_1}), (\mathrm{O_2}), (\mathrm{O_3})$ を満たす集合族 $\mathcal{O}$ を開集合と呼ぶところから始めます．

開集合は，ある点を含めば，そのそばの点も含む集合と解釈することができます．すると，点 $\boldsymbol{x}$ が集合 A のすぐそばにあるということが定義できます．すなわち，$\boldsymbol{x}$ を含むすべての開集合は A と交わるとき，$\boldsymbol{x}$ は A の**触点**であるといいます．もちろん，この条件は，$\boldsymbol{x}$ の任意の ε 近傍は A と交わるということと同値です．あえて，開集合を使って定義をすることは意味のあることですが，その説明は少し先の話題にしたいと思います．ともあれ，$\boldsymbol{x}$ を含む開集合は $\boldsymbol{x}$ の近くの点を含みますが，どのくらい近くの点まで含むのかは，開集合に依るわけです．そこで，$\boldsymbol{x}$ を含むどのような開集合も A の点を含むということは，$\boldsymbol{x}$ のいくらでも近くに A の点があるということで，それは，A のすぐそばに $\boldsymbol{x}$ があるということになります．

$\boldsymbol{x}$ が A の点ならば，A の触点ですが，そうでなくても A の触点になることがあるということが重要です．例えば，有理数と実数の関係を思い出してください．A を有理数全体 $\mathbb{Q}$, X を $\mathbb{R}$ とすると，任意の無理数は $\mathbb{Q}$ の触点になります．t の ε 近傍は開区間 $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ ですから，必ず有理数を含みます．実際，$\dfrac{1}{\varepsilon} < n$ となる自然数 n をとれば，n を分母とする有理数は等間隔 $\dfrac{1}{n}$ で並んでいるので，長さ 2ε の開区間と必ず交わるからです．ここで，$\mathbb{Q}$ は可算濃度ですが，$\mathbb{R}$ は連続濃度であることを思い出しましょう．触点はもとの集合よりずっと大きな集合をつくることがあります．

A の触点全体のつくる X の部分集合を A の**閉包**といい，$\overline{A}$ で表します．位相関連では，$\overline{A}$ は閉包を表し，決して，補集合ではありません．高校数学の影響は恐ろしいもので，いくら口うるさく注意しても，試験で閉包と補集合を間違える学生は後を絶ちません．

一般に，開集合の補集合となる集合を**閉集合**といいます．A が X のどのような部分集合であっても，$\overline{A}$ は閉集合になります．実際，$\boldsymbol{x} \notin \overline{A}$ とすると，$\boldsymbol{x}$ を含む開集合 U で A と交わらないものがあります．すると，$\boldsymbol{x}$ の ε 近傍 $N(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ で U に含まれるものがあります．このとき，$\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ とすると，$\boldsymbol{y} \in U$ ですから，$\boldsymbol{y}$ は $\overline{A}$ の点ではありません．すなわち，$N(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ は $\overline{A}$ の補集合に含まれます．したがって，$\overline{A}$ の補集合は開集合で，$\overline{A}$ は閉集合です．もう少し頑張ると，$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることもわかります．

5. 連続写像と同相写像

微積分の連続関数の考えは，自然に $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X から $\mathbb{R}^m$ の部分集合 Y への写像 f に拡張されます．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ と $\boldsymbol{x} \in X$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $\boldsymbol{y} \in X$ に対し

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta \implies d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) < \varepsilon$$

が成り立つということです．このとき写像 f は**連続**であるといいます．

実は，この条件は位相を用いて，より簡明に言い替えることができます．素朴に考えて，f が連続ならば，A のすぐそばの点は $f(A)$ のすぐそばの点に写されるであろうと期待できます．これは

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

と書き表されます．この条件は 2 つの集合 X と Y の両方に関わるもので，左辺の閉包は X にお

ける閉包で，右辺の閉包は Y における閉包であることに注意しましょう．ですから，この条件により X における位相と Y における位相の関係が表されているのです．

f が連続のとき，この条件が成り立つことを確かめましょう．$\boldsymbol{x} \in \overline{A}$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) \in \overline{f(A)}$ を示せば，十分です．そのために，$f(\boldsymbol{x})$ を含む Y の開集合 W が $f(A)$ の点を含むことを示します．実際，W は開集合ですから $f(\boldsymbol{x})$ の ε 近傍を含みます．

$$N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon) \subset W.$$

この $\boldsymbol{x}$ と $\varepsilon > 0$ に対し，連続の条件により存在する $\delta > 0$ を選びます．すると

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \delta \implies d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) < \varepsilon$$

が成り立ちますが，これは

$$\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x},\delta) \implies f(\boldsymbol{y}) \in N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$$

と読めます．すなわち $f(N(\boldsymbol{x},\delta)) \subset N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ が成り立ちます．一方，$\boldsymbol{x} \in \overline{A}$ ですから，$N(\boldsymbol{x},\delta)$ は A の点 $\boldsymbol{a}$ を含みます．よって

$$f(\boldsymbol{a}) \in f(N(\boldsymbol{x},\delta)) \subset N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon) \subset W$$

となり，W が $f(A)$ の点を含むことが示されました．

今度は，X のすべての部分集合 A に対して，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つならば，f は連続であることを示しましょう．今，$\varepsilon > 0$ と $\boldsymbol{x} \in X$ が任意に与えられたものとします．このとき，$\delta > 0$ が存在して，$f(N(\boldsymbol{x},\delta)) \subset N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ が成り立つことを示せば十分です．ここで仮定は，すべての部分集合 A に対して，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つということですから，都合のよい A を選んで，$f(N(\boldsymbol{x},\delta)) \subset N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ が成り立つような $\delta > 0$ の存在を示せばよいのです．少々技巧的ですが

$$A = X - f^{-1}(N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$$

とおきます．すると，明らかに

$$f(A) \subset Y - N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$$

です．右辺は閉集合ですから

$$\overline{f(A)} \subset Y - N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$$

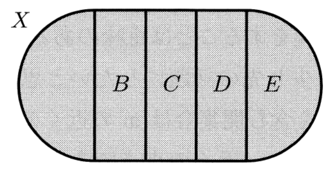
がわかります．すると，仮定より

$$f(\overline{A}) \subset Y - N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$$

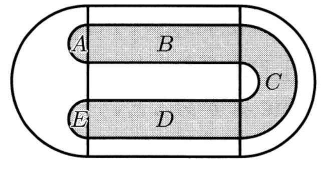
となります．ここで，$\boldsymbol{y} \in \overline{A}$ とすると，$f(\boldsymbol{y}) \notin N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ となりますが，これは $\boldsymbol{y} \in A$ を意味します．すなわち，$\overline{A} \subset A$ が示されたわけで，したがって，$\overline{A} = A$ で，A は閉集合です．よって，$f^{-1}(N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$ が開集合であることが示されました．明らかに，$\boldsymbol{x} \in f^{-1}(N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$ ですから，ある $\delta > 0$ が存在して，$f(N(\boldsymbol{x},\delta)) \subset N(f(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ が成り立つことがわかりました．

いかがでしょうか．初めての人にはついてこられないほど複雑な論理操作と集合算でしょう．集合と写像に関する，当り前だけど間違いやすい，補集合と逆像の関係などを駆使した議論です．さらに後半の証明の A の選び方になると，初等幾何における補助線の探し方にも似た，経験を積んだ人にしか思いつかない技巧です（本当はそうでもないのですが）．しかし，こういうものを通さないと，集合と位相の内容を述べられないのです．直観的に明らかな，すぐそばの点はすぐそばに写るという連続写像の特徴付けの裏には，このような論理と演算がひそんでいます．

X を下図のような閉領域とします．A と E は半円で，B, C, D は正方形を 3 等分した長方形です．



X 上の写像 f を下図で定めます（灰色部分）．



明らかであると思いますが，f は A 上では縮小変換，B 上では x 方向拡大 y 方向縮小のアフィン変換，C 上では (x, y) を (r, θ) とする極座標変換，D 上では -1 倍と B 上と同様なアフィン変換，E 上では -1 倍と縮小変換です．これで写像

が確定し，近い点が近い点に写る，または，すぐそばの点がすぐそばの点に写ることが確認でき，連続写像であることがわかります．

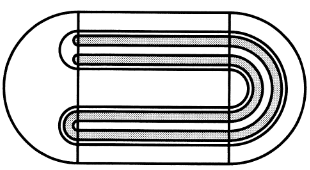
さらに，f は X とその像 $f(X)$ の間の $1:1$ 対応を定めます．しかも，その逆対応 $f^{-1}: f(X) \to X$ も連続写像です．このような，連続で，逆も連続であるような $1:1$ 対応（全単射）を**同相写像**といいます．先の集合論的議論を行うと，同相写像は開集合を開集合に，閉集合を閉集合に対応させることがわかります．

今の場合，$f(X) \subset X$ ですから，f を 2 回以上適用することができます．

$$x \mapsto f(x) \mapsto f(f(x)) \mapsto \cdots \mapsto f^{\circ n}(x).$$

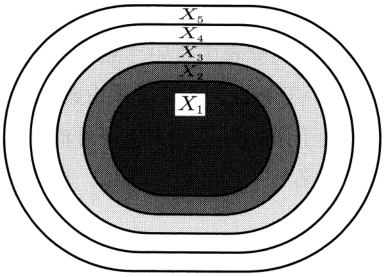
ただし，$f^{\circ 1}(x) = f(x)$, $f^{\circ 2}(x) = f(f(x))$, $\cdots$, $f^{\circ n}(x) = f(f^{\circ (n-1)}(x))$ と定めます．

この $f^{\circ n}$ はなかなか複雑な写像です．$f^{\circ 2}$ の像を下図で示します（灰色部分）．



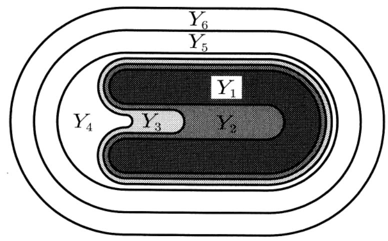
この図から，$f^{\circ 3}$ は想像できます．$f^{\circ 100}$ は，定義できていますが，想像することは困難です．しかし，それがところにより，数倍の拡大を 100 回繰り返したり，数分の一の縮小を 100 回繰り返したりすることは想像できます．したがって，距離的にはめちゃくちゃですが，同相写像で，開集合や閉集合を保つ写像なのです．

この $f: X \to f(X)$ を同相写像 $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に拡張することができます．$X_1 = X$ とおき，順次大きくなる閉領域 $X_2, X_3, X_4, \cdots$ を図のように選びます．



$i \geqq 2$ に対して，$\overline{X_i - X_{i-1}}$ は円環領域 $A_i = \left\{(x,y) \,\middle|\, i-1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq i\right\}$ と同相です．

同様に，$Y_1 = f(X)$ とおき，順次大きくなる閉領域 $Y_2, Y_3, Y_4, \cdots$ を図のように選びます．ここでは，$Y_4 = X_1$ となるようにしました．



ここでも，やはり，$i \geqq 2$ に対して，$\overline{Y_i - Y_{i-1}}$ は円環領域 A_i と同相です（少し歪みますが）．

同相写像 $\tilde{f}_i : \overline{X_i - X_{i-1}} \to \overline{Y_i - Y_{i-1}}$ を X_{i-1} 上の $\tilde{f}_{i-1}$（$i=2$ のときは f）とつながるように，定めます．

同相写像 $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_i(x),\ (x \in X_i - X_{i-1} \text{のとき})$$

と定めることができます．この $\tilde{f}$ は**スメールの馬蹄形写像**と呼ばれています．

例えば，$\tilde{f}^{\circ 100}$ は，X 上 $f^{\circ 100}$ ですから，$\mathbb{R}^2$ の ε 近傍を非常に複雑な集合に写します．しかし，同相写像ですから，開集合全体を不変に保っているわけです（開集合を開集合に写し，開集合でないものは開集合に写さない）．位相という概念が，いかに，距離を保つということとか ε 近傍を保つということと，かけ離れているかということが，感じられたでしょうか．そして同相写像が，いかに自由な概念であるか，感じられたでしょうか．

参考文献

1) 高橋渉『距離空間と位相空間（数理解析入門シリーズ）』（横浜図書，2001）．
2) R.L. Devaney（後藤憲一訳）『カオス力学系入門 第 2 版』（共立出版，2003）．

（かわさき・てつろう，学習院大学理学部）

経路積分と量子解析

第1回

いかにして量子現象を数理的に扱うか

量子古典対応を基に量子系を視る

鈴 木　増 雄

1.1 本連載を始めるにあたって

最近の物理学の研究においては，分野横断的な交流によって大きく発展することが多い．物理現象の中でも特に，量子現象は，素粒子や原子分子の領域においては言うに及ばず，広く物質科学から宇宙物理（ブラックホールのエントロピーなど）まで，様々な分野で重要な役割を果たしている．これらの幅広い分野の理論的研究において基本的な概念の一つは，量子古典対応（変換）である[1~5]．その具体的な数学的処法を与えるのが，本連載で取り扱う経路積分[6,7]と量子解析[5,8,9]である．

量子古典対応にも 2 つの立場がある．一つは，古典系を量子化するディラック–ファインマンの立場である．すなわち，古典的なラグランジアンを用いて経路積分を導入することにより，量子力学的定式化を行うものである．後に詳しく解説するように，ファインマンは古典的な調和振動子のラグランジアンを経路積分表示することにより，ハイゼンベルグの行列力学やシュレーディンガーの波動力学による量子力学と同等な「経路積分による量子力学の定式化」を発見した．

もう一つは，もともと量子的な物理対象系（例えば，スピン系など）を古典変数によって表現される系（いわゆる古典系）に変換するものである[1~5]．どちらの立場も量子系を経路積分[6,7]や経路和[1,3~7]で表すという点では類似しているが，目的が逆になっている点が大きな違いである．この量子古典対応（ST 変換とも呼ばれている変換）を用いると，量子系の計算機実験が可能となる．この典型的な方法が量子モンテカルロ法である[1,10]．この方法は，現在多くの物性物理学の分野で用いられている．

本連載は，この量子古典対応という概念を主軸にして経路積分と量子解析（非

可換な演算子の関数の微分やテーラー展開を扱う数学的方法）を，次のようなテーマに分けて解説する予定である．

- **古典力学から量子力学へ**（ファインマンの経路積分法の導入／すべては調和振動子に始まる／量子ゆらぎを表す経路積分／半古典近似と変分法／場の理論の経路積分量子化と藤川の方法（量子アノマリー）／変分原理と経路積分／散逸ダイナミクスの変分原理と経路積分量子化）
- **量子古典対応**（非可換系を可換系で表現する—量子古典変換（ST 変換）／トロッター公式とその一般化／量子モンテカルロ法の数理／カオスと高精度計算アルゴリズム／高次指数分解の一般論／物性物理への応用／宇宙物理学と AdS/CFT 対応／ブラックホールのエントロピー）
- **量子解析—非可換微分法**（テーラー展開の量子版を創る／非可換微分法としての量子解析—量子古典対応の数理／指数演算子の展開公式／BCH（Baker–Campbell–Hausdorff）公式／非可換成分の行列（大行列）と準行列式）
- **統計物理学と量子解析**（量子解析の非平衡量子統計力学への応用／輸送現象における不可逆性とエントロピー生成—密度行列の対称性と量子解析／量子古典対応と不可逆性—線形応答から非線形応答まで／散逸系における不確定性原理／熱場ダイナミクス（Thermal Field Dynamics; TFD）と不可逆性—緩和と熱浴／熱力学的エントロピーと情報エントロピー／ゆらぎの定理について）
- **物性物理・量子情報の基礎的問題への応用**（巨視的量子トンネル効果／量子エンタングルメントと熱場ダイナミクス）
- **確率過程と経路積分・量子解析**（フォッカー・プランク方程式の解の表示法／秩序形成理論—代数的解法とスケーリング解／宇宙のインフレーションメカニズムとスケーリング理論）
- **確率的量子化の方法—量子古典対応から古典量子対応へ**

1.2 各テーマの概要

1.2.1 「古典力学から量子力学へ」の概略

ニュートンによって確立された古典力学の運動方程式を出発点にして，その系の量子力学的定式化をするファインマンの経路積分の話から始めたい．量子力学の本質は，決定論的古典力学に対して，量子的不確定性（ゆらぎ）の存在にある．この量子的ゆらぎを経路積分によって表現することにより，系を量子化することができる．このアイデアはもとはディラックによる．ファインマンは，このディラックのアイデアに基づいて，量子系の遷移振幅 $Z_{\mathrm{ini,fin}}$ を

$$Z_{\mathrm{ini,fin}} \equiv {}_{\mathrm{fin}}\langle\psi \mid \psi\rangle_{\mathrm{ini}} = \int_{\mathrm{ini}}^{\mathrm{fin}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathscr{L}(x(t),\dot{x}(t))dt\right) D[x(t)] \quad (1.1)$$

のように表した．ただし，$\int \cdots D[x(t)]$ は経路 $\{x = x(t)\}$ に関する「経路積分」を表し，$\mathscr{L}$ は古典系のラグランジアン

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - U(x) \tag{1.2}$$

を表す[6,7]．ここで，$U(x)$ は系に働く保存力に対応するポテンシャルエネルギーである．式 (1.1) の遷移振幅（いわば作用）が極値を持つような経路が古典力学の経路となる．そのまわりのゆらぎとして量子効果が記述されることになる．

式 (1.1) を，具体的なポテンシャル $U(x)$ に対して計算するには，半古典近似を使うことが多い[6,7]．

また，式 (1.1) の中の指数関数の肩の時間積分を作用 I とみれば，それを極小とする最小作用の原理となり，この変分原理から，古典的なハミルトン方程式が導かれることはよく知られている通りである[6,7]．

ところで，散逸のある力学系，例えば，

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) - F_{\rm dyn}(x(t)) = 0 \tag{1.3}$$

を変分原理で導くような変分関数，すなわち散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\rm diss}$ は今まで見つかっていなかった．その理由は，力学的力 $F_{\rm dyn}(x(t))$ に対して，散逸力 $-\zeta\dot{x}(t)$ は時間反転に対して，反対称的であり他の項と対称性が異なるからである．無理やり時間依存の因子をつけたりして変分関数を数学的に今までの $x(t), \dot{x}(t), t$ の関数の範囲で求めても物理的な変分原理にはならない[11]．

ところが，最近この難問を筆者は解決することができた[12]．そのアイデアは，輸送現象（定常状態）の変分原理を久保の線形応答[13]から非線形応答[14]に拡張する際に導入された「瞬間のエントロピー生成・散逸ではなく，プロセス全体（過去から問題とする時刻まで）を考慮すること」という新しい視点より生まれた．すなわち，運動方程式 (1.3) を導く散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\rm diss}$ は物理的におおむね

$$\mathscr{L}_{\rm diss} = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - U(x) - \int_{\substack{x(0)\\ \rm (path)}}^{x(t)} \zeta\dot{x}(t'(x'))dx' \tag{1.4}$$

で与えられることがわかった[12]．ここで，$U(x)$ は $\partial U(x)/\partial x = -F_{\rm dyn}(x)$ を充たす力学的ポテンシャルである．新しい点は式 (1.4) の右辺の最後の項が過去の経路に依る積分になっていることである．ただし，$t(x)$ は $x = x(t)$ の逆関数であり，多価関数になるので経路を指定しないと一意的に決まらず，上の積分はこの意味で経路に依存することになる．この点が全く新しい．このように，散逸変分関数は $\mathscr{L}_{\rm diss}$ の時間積分であるから，2 重積分（カルタンの相対積分不変式または K–T チェンの逐次積分形）になっていることが散逸系の変分原理の特徴である[14]．

さらに，ここで導入した散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\rm diss}$ を式 (1.1) の $\mathscr{L}$ の代わりに用いると，散逸系の経路積分量子化が可能となる．この定式化を用いて，散逸効果を含む不確定関係 $\Delta x \Delta p \geq \delta(\hbar, \zeta)$ が導ける．右辺の関数 $\delta(\hbar, \zeta)$ の具体的な形など，詳しくは次回以降の解説を参照して頂きたい．

1.2.2 「量子古典対応」の概略

前節でも述べた通り，この概念は古くディラックやファインマンにまで遡る

ことができる．彼らは古典系から出発して，それに対応する量子系を記述する形式として経路積分表示に到達した．一方，統計物理学の分野では，元来量子力学的な系を古典表示して取り扱い易くする方法が提唱された[1~5]．量子系が古典系に等価になるといっても，それは，決して通常の有限の値を持つ短距離力で記述される古典系ではない．それは，後で説明する「量子軸」方向のサイズと共に発散するような特異な力を持つ．また，その相互作用の対称性も通常のものとは異なり，元の量子相互作用に由来する新しい型の対称性になる．これらの特徴は，量子古典対応に共通な本質である．実際，後の回で述べる AdS/CFT 対応では，重力という（示量性でない）長距離力を持つ反ド・ジッター（Anti-de Sitter; AdS）宇宙と共形場理論（Conformal Field Theory; CFT）との対応になっている[2]．

統計力学の量子模型の典型的な例は，量子ハイゼンベルグ模型であり，次のように $O(3)$ 対称性を持つ２体力のハミルトニアンで与えられる：

$$\mathscr{H} = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j. \tag{1.5}$$

この量子スピン系を，古典的な変数（可換な変数，すなわちアーベリアン）であるイジングスピン（$S_i = \pm 1$）を用いて表すと，対称性の高い４体力イジング模型となる[1]．しかも，d 次元量子スピンは $(d+1)$ 次元イジング模型で表され，新たに追加された１次元方向は「量子軸」または「トロッター軸」（筆者が最初に名づけた）と呼ばれている．この方向の相互作用は，「トロッター数」（トロッター軸方向の長さ）を大きくすると共に無限大になる特異な相互作用であることを注意しておきたい．

このように，特異な相互作用を持つ古典系になっても，相互作用が可換であることは大きな利点・強みである．実際，この変換された系は計算機実験（シミュレーション）で研究することができる．その代表がモンテカルロ法による研究方法である．これは「量子モンテカルロ法」と呼ばれ，多くの分野で盛んに利用されている[1,10]．

以上の量子古典対応の背後にあるのは，互いに非可換な演算子 A, B に対する，次のいわゆるトロッター公式

$$\mathrm{e}^{x(A+B)} = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{\frac{xA}{n}} \mathrm{e}^{\frac{xB}{n}})^n \tag{1.6}$$

である．この公式は，演算子 A, B が有限行列のようにノルムが有界な場合には問題なく利用できるが，非有界の場合には難しい数学的研究（ノルム収束ではなく，弱収束など）の対象となる[15,16]．ここでは，そういう数学的問題は避けノルム有界な演算子を対象にして物理に応用することにする．

数学者が公式 (1.6) を利用するときは，A, B の対称性から $\exp(x(A+B))$ の対称性などを導くために使うので，厳密な収束証明や演算子の範囲（ドメイン）を気にしなければならない．しかし，物理の問題に応用する際は，トロッター数 n は大きいが有限の場合であり，むしろ，公式そのものの近似の度合のほうが重要である．

そこで，以下では，オイラー的に形式的な公式に着目して，近似の度合を上げる最近の研究成果[16)]の概略を，紹介することにしよう．

まず，最低近似の公式は，よく知られているように，

$$e^{x(A+B)} = \left(e^{\frac{xA}{n}} e^{\frac{xB}{n}}\right)^n + O\left(\frac{x^2}{n}\right) \tag{1.7}$$

である．次に，右辺の2つの積を対称化すると，1次だけ近似の程度が上がって

$$e^{x(A+B)} = \left(e^{\frac{xA}{2n}} e^{\frac{xB}{n}} e^{\frac{xA}{2n}}\right)^n + O\left(\frac{x^3}{n^2}\right). \tag{1.8}$$

同様にして，任意次数の近似公式が漸化的に作られている[17)]．上の公式を正規直交系で挟んで対角成分の和を取れば，量子系の状態和が古典系の状態和で表されることになる[1)]．この状態和から系のエントロピーなどが求められる．

1.2.3 「量子解析—非可換微分法」の概略

量子力学の理論形式は非可換な演算子で表現されることに特徴がある．2つの非可換な演算子の観測値を同時に確定することはできず，不確定性関係が現れる．

このような非可換な演算子 A, B に対して，関数 $f(A+B)$ を演算子 B で展開する必要に迫られることが多い．通常の c-数（可換な数）x, y に対しては通常のテーラー展開

$$f(x+y) = f(x) + f^{(1)}(x)y + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)y^n + \cdots \tag{1.9}$$

が成り立つことはよく知られている（ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階微分である）．これを非可換な演算子 A, B の関数 $f(A+B)$ に拡張して筆者は式 (1.9) の量子版を作った．それらがこれからアイデアだけ説明する「量子解析」である[8,9)]．演算子 A, B が互いに可換な場合にはもちろん

$$f(A+B) = f(A) + f^{(1)}(A)B + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(A)B^n + \cdots \tag{1.10}$$

が成り立ち，$f^{(n)}(A)B^n$ は単に2つの演算子 $f^{(n)}(A)$ と B^n の積である．ところが，A と B が非可換な場合には，事情は全く変わってしまう．量子古典対応という観点で話を進めたいので，形式的には式 (1.9) のテーラー展開と同形にして，その中味は量子的に拡張することにする．そこで，演算子を他の演算子に変換する「超演算子」を用いて，演算子 A の関数 $f(A)$ の A に関する「微分超演算子 $df(A)/dA$」を次のように導入する：

$$\frac{df(A)}{dA} = \int_0^1 f^{(1)}(A - t\delta_A)dt = \frac{f(A) - f(A-\delta_A)}{\delta_A} = \frac{\delta_{f(A)}}{\delta_A}. \tag{1.11}$$

ただし，δ_A は $\delta_A B \equiv [A, B]$ で定義される超演算子（通常，内部微分と呼ばれる）．式 (1.11) の中の A は左から A をかけて積を作る超演算子と解釈する．こうすると，A と δ_A は互いに可換な超演算子となる：

$$(A\delta_A)B = (\delta_A A)B = A[A, B]. \tag{1.12}$$

この A と δ_A の可換性のために，式 (1.11) の t 積分も3つ目の分数式も意味を持つのである（ちなみに，δ_A の逆 δ_A^{-1} は存在しないが，$f(A) - f(A-\delta_A)$

は δ_A に比例するので δ_A で割ることが可能となる）．超演算子の差分の比で表された式 (1.11) を「量子微分」と呼ぶ．この量子解析の定式化では，量子古典対応が明確である．すなわち，A と B が可換な場合には，δ_A は零超演算子とみなすことができ，式 (1.9) は古典微分 $f^{(1)}(A)$ に帰着する．

同様にして，高階量子微分 $d^n f(A)/dA^n$ も定義できて，これを $f^{(n)}(A)$ の代わりに用いると，形式的には式 (1.10) と同形の量子テーラー展開が証明できる[8,9]．

この量子微分を用いると，指数演算子 $\exp(A+xB)$ や対数演算子 $\log(A+xB)$ のパラメータ x に関する展開が可能となる[8,9]．こうして，BCH 公式の一般項やその他多くの非可換公式を具体的に容易に導けることになった[8,9]．

また，行列を成分に持つ行列（大行列）や行列式（準行列式）も同様に扱うことができる．

1.2.4 「統計物理学と量子解析」の概略

量子解析は非平衡統計力学を扱う際には極めて有効である．フォン・ノイマン方程式から，密度行列 $\rho(t)$ の任意の関数 $f(\rho(t))$ が再びフォン・ノイマン方程式と同形の方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(\rho(t)) = [\mathscr{H}(t), f(\rho(t))] \tag{1.13}$$

を充たすことが公式 (1.11) を用いると容易に示せる．式 (1.13) は量子エントロピーや量子エンタングルメントを議論する際に役に立つ．また，線形応答理論[13]におけるエントロピー生成と不可逆性を導く際にも，非線形輸送現象の解析の場合にも，量子解析は便利である[14]．

さらに，統計力学を場の理論形成で扱う熱場ダイナミクスを定式化する際には，$\rho(t)^{1/2}$ を扱うので，やはり量子解析で導かれる公式 (1.13) は重要である[18]．

最近よく話題となる「ゆらぎの定理」や情報エントロピーの使い方の問題点にもふれる予定である．

1.2.5 「物性物理・量子情報の基礎的問題への応用」の概略

物性物理学の研究分野はあまりにも広大であり，その中の基礎的問題に絞っても，超伝導，超流動，近藤効果，乱れと局在現象，スピングラスと情報理論，…ときりがないほど多い．ここでは，(a) レゲットらの巨視的量子トンネル効果の経路積分による取扱い，(b) 量子エンタングルメントと熱場ダイナミクスなどについて議論する．ここでも経路積分の方法が重要な役割を果たす．

1.2.6 「確率過程と経路積分・量子解析」の概略

熱的ゆらぎと量子ゆらぎは形式的には類似しているところがあり，そこに着目すると数学的には確率過程も量子力学も経路積分を用いて共通の取扱いが可能となる．実際，確率微分方程式の解を集団（アンサンブル）として捉えると，確率変数 x が時刻 t でとる確率 $P(x,t)$ を扱うことになる．それを記述する偏微分方程式がフォッカー・プランク方程式である．これを適当に変換すると，虚時間に対するハミルトニアン定式化が得られる．これも一つの古典量子対応と形式的にはみなせる．このように，確率過程を代数的に表現し，発展演算子

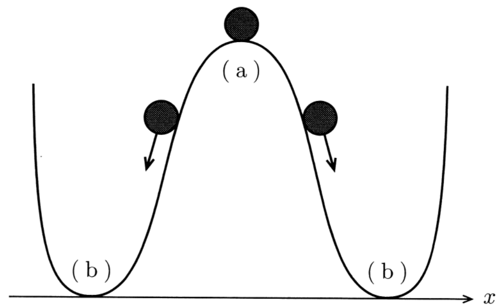


図 1.1　不安定点 (a) から安定点 (b) への緩和，または秩序生成（文献 5) より）.

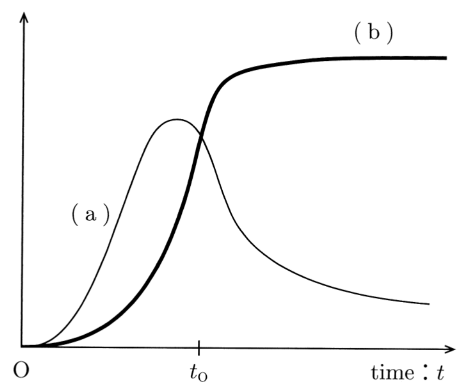


図 1.2　ミクロなゆらぎがオンセットタイム t_O 近傍で指数関数的に増大し，巨視的秩序が形成される[18]．(a) ゆらぎ，(b) 秩序パラメータ．

を指数演算子で表すと，量子解析の処法が使えるので見通しがよくなる．

例えば，図 1.1 に示される不安定点からの非線形緩和，すなわち秩序生成の理論[19]はその後のいろいろな分野での類似の理論のプロトタイプとみることができる．図に示されたポテンシャル $U(x)$ に対応する力 $-\partial U(x)/\partial x$ の他にランダムな力（ノイズ）$\eta(t)$ が働いている系の運動方程式（非線形ランジュバン方程式）は

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}U(x) + \eta(t) \tag{1.14}$$

と与えられる．この一見簡単に見える確率微分方程式でも，今のところ厳密解は求まっていない．しかし，物理的に本質的な領域，すなわち，秩序生成領域（オンセットタイムの近傍）の振舞いを充分良く記述する解は発見されている．それは「秩序生成のスケーリング解」と呼ばれている[18]．その定性的な振舞いは図 1.2 に示されている通りである．すなわち，オンセットタイム t_O の近傍でミクロなゆらぎが指数関数的に大きく増大し，巨視的秩序が形成される[19]．この解法といろいろな物理現象への応用については後の回の記事で詳しく説明する．

1.2.7 「確率過程量子化の方法―量子古典対応から古典量子対応へ」の概略

古典系から出発して量子化するもう一つの方法がパリジとウーによって提唱された「確率過程量子化の方法」である[20,21]．確率微分方程式の中のノイズの

大きさを，プランク定数を用いて量子効果をちょうど与えるように設定する．この方法は量子系（場の理論）を計算機実験するのに便利である．この方法は，彼ら著者たちも論文で指摘しているように，これは，ST 変換で量子スピン系を古典系に変換して計算機実験する量子モンテカルロ法と共通するアイデアに基づいている．

いずれにしても，多くの分野で量子古典変換の概念が広く普及しつつあることは喜ばしい限りである．

1.3 おわりに

以上，各テーマの概略を説明したが，次回以降，それぞれ詳しくわかり易く最新の研究成果も取り込みながら解説したい．また，できる限り応用にもふれたい．

参考文献

1) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1454 (1976).
2) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
3) 松枝宏明，物性研究，2011 年 7 月号，383–482 頁．
4) B.K. Chakrabarti, A. Dutta and P. Sen, *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models* (Springer, 1996).
5) 鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，2000）．
6) R.P. ファインマン/A.R. ヒッブス著，北原和夫訳，『ファインマン経路積分と量子力学』（マグロウヒル出版，1990）．
7) 大貫義郎，柏太郎，鈴木増雄，『経路積分の方法』（岩波書店，2000）．
8) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **183**, 339 (1997).
9) T.L. Chow 著，鈴木増雄，香取眞理，羽田野直道，野々村禎彦共訳，『科学技術者のための数学ハンドブック』（朝倉書店，2002）訳注．
10) M. Suzuki (ed.), *Quantum Monte Carlo Methods in Condensed Matter Physics.* (World Scientific, Singapore, 1993), およびその中の引用文献．
11) 大貫義郎，『力学』（岩波書店，1994）第 1 章 43 頁の解説参照．
12) M. Suzuki, *Physica* **A392**, 4279 (2013), APPC/2 プロシーデングス，and to be submitted to *Physica A*.
13) R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570 (1957).
14) M. Suzuki, *Physica* **A390**, 1904 (2011); ibid. **A391**, 1074 (2012); ibid. **A392**, 314 (2013).
15) T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 第 2 版 (1976).
16) K. Aomoto, On a unitary version of Suzuki's exponential product formula, *J. Math. Soc. Japan* vol.**48**, No.3, 693 (1996).
17) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **A146**, 319 (1990); id. *J. Math. Phys.* **32**, 400 (1991).
18) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Japan* **54**, 4483 (1985); id. *Prog. Theor. Phys.* **100**, 475 (1998); Y. Hashizume and M. Suzuki, *Physica* **A362**, 3518 (2013).
19) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 77 & 477 (1976); id. **57**, 380 (1977); id. *Suppl.* **64**, 402 (1978); id. *Adv. Chem. Phys.* **46**, 195 (1981); id. *Int. J. Mod. Phys.* **B26**, 1250001 (2012).
20) G. Parisi and Y.S. Wu, *Scientific Sinica* **24**, 483 (1981).
21) M. Namiki, *Stochastic Quantization* (Springer, 1992).

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

大学院入試問題からみた
大学の数学
数学のより深い理解を目指す

第14回

フーリエ解析

フーリエ級数とフーリエ変換

海老原 円・太田 雅人

今回はフーリエ級数とフーリエ変換に関する問題を取り上げる．フーリエ解析は，純粋数学としても応用数学としても重要であり，様々な観点があるが，今回はフーリエ級数とフーリエ変換の偏微分方程式の解法への応用を中心に見ていくことにする．

14.1 フーリエ級数

まずは，フーリエ級数の基本的な問題を取り上げる．

問題 14.1 （早稲田大学大学院先進理工学研究科物理学及応用物理学専攻，平成 22 年度） 閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = |x|$ を考え，次式のようにフーリエ級数に展開する．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}.$$

(1) フーリエ係数 f_n を計算せよ．

(2) 正弦関数，余弦関数を用いる場合，$f(x)$ のフーリエ級数はどう書けるか．

(3) $x = 0$ とおくことにより，次の 2 つの式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

解答例 まず，整数 $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = 2\pi\delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{14.1}$$

だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{imx} e^{-inx}\,dx$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\,dx = 2\pi f_n$$

となる．よって，$f(x)$ のフーリエ係数は

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \tag{14.2}$$

で与えられる．このことを用いて，問題を解いていく．

(1) まず，$n \neq 0$ のとき，オイラーの公式，関数の偶奇性と部分積分により

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{n}\left[x\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$
$$= \frac{2}{n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2}\{(-1)^n - 1\}$$

となる．よって，$n \neq 0$ のとき

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\{(-1)^n - 1\}.$$

また，$n = 0$ のときは

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(2) まず，(1) より，$n = 1, 2, \cdots$ に対して $f_{-n} = f_n$ である．

また，$f(x) = |x|$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で連続かつ**区分的に滑らか**であり，**周期条件** $f(-\pi) = f(\pi)$ を満たすから，すべての $x \in [-\pi, \pi]$ に対して

$$|x| = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) = f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos nx$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

が成り立つ．

(3) (2) の結果に $x = 0$ を代入すれば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ が分かる．また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ となる．

解答終わり

フーリエ係数の定義 (14.2) を暗記するよりも，解答例のはじめに示したように，関数系 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の**直交性** (14.1) からフーリエ係数 (14.2) を導く方法を理解してお

きたい．また，一般に，関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で区分的に滑らかであるとは，区間 $[a,b]$ の有限分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ を適当にとれば，各小区間 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,\cdots,n)$ において $f(x)$ が C^1 級となることである．例えば，区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 $f(x)=|x|$ は，小区間 $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$ において C^1 級だから，区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかである．

次は，フーリエ級数を用いた，**熱伝導方程式**（**熱方程式**）の初期・境界値問題の解法に関する典型的な問題である．

問題 14.2 （東北大学大学院理学研究科物理学専攻，平成 21 年度） 1 次元の熱伝導は，次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

で記述される．$u(x,t)$ は，位置 x の時刻 t での温度を表す．k は熱伝導度を表す正の定数である．時刻 $t\geq 0$ に対し，$0\leq x\leq \pi$ での 1 次元の熱伝導を，

$$\text{境界条件}: u(0,t)=u(\pi,t)=0, \tag{2}$$

$$\text{初期条件}: u(x,0)=x(\pi-x) \tag{3}$$

のもとで考える．以下の問いに答えよ．考え方と，計算過程（要点のみでよい）も示せ．

1) $u(x,t)$ を，x のみに依存する関数 $X(x)$ と，t のみに依存する関数 $T(t)$ を用いて $u(x,t)=X(x)T(t)$ と変数分離する．このとき，偏微分方程式 (1) は λ を定数として

$$\frac{d^2X}{dx^2}-\lambda X=0, \tag{4}$$

$$\frac{dT}{dt}-k\lambda T=0 \tag{5}$$

となることを示せ．

$\lambda\geq 0$ とすると，境界条件，初期条件をともにみたす式 (4) の解が存在しないことから，以下，$\lambda<0$ の場合について考える．

2) $X(x)=b_n\sin nx$（ただし，n は自然数で，b_n は定数）が，境界条件 (2) をみたす式 (4) の解であることを示し，このときの λ を求めよ．

3) 前問 2) より，偏微分方程式 (1) の，境界条件 (2) をみたす解は，一般に

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nT_n(t)\sin nx \quad (\text{ただし，} T_n(t=0)=1) \tag{6}$$

と表される．$T_n(t)$ を求めよ．

4) 式 (6) の b_n が

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,0)\sin nx\,dx \tag{7}$$

で与えられることを示せ．

5) 与えられた初期条件 (3) に対し，式 (6) の b_n を求めよ．また，温度分布が時刻 t とともに変化する様子を，横軸 x，縦軸 u のグラフにして図示せよ．

解答例　**1)** $u(x,t) = X(x)T(t)$ を (1) に代入すると，$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$ となる．これを

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

と書き直すと，左辺は x に依らない関数で，右辺は t に依らない関数だから，これは x にも t にも依らない定数である．この定数を λ とおくと，$X(x), T(t)$ はそれぞれ，式 (4), (5) を満たすことが分かる．

2) $\lambda < 0$ のとき，式 (4) の一般解は

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,x \tag{14.3}$$

で与えられる．ここで，C_1, C_2 は任意定数である．

$u(x,t) = X(x)T(t)$ に対する境界条件 (2) から，$X(x)$ に対する境界条件

$$X(0) = X(\pi) = 0 \tag{14.4}$$

が導かれる．(14.3) に $x = 0$ を代入すると，$0 = X(0) = C_1$ となる．

また，$X(\pi) = C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0$ だから，$C_2 \neq 0$ のとき，$\sqrt{-\lambda} = n$（n は自然数）でなければならない．

以上により，自然数 n に対して，$\lambda = -n^2$ のとき，境界条件 (14.4) をみたす式 (4) の解は，$X(x) = b_n \sin nx$（b_n は定数）で与えられる．

3) 初期条件 $T(0) = 1$ を満たす式 (5) の解は $T(t) = e^{k\lambda t}$ で与えられる．

特に，$\lambda = -n^2$ として，$T_n(t) = e^{-kn^2 t}$ を得る．

4) 式 (6) より

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m T_m(0) \sin mx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx$$

である．この両辺に $\sin nx$ をかけて 0 から π まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} u(x,0)\sin nx\,dx &= \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \sin nx\,dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\pi}{2}\,b_n\end{aligned}$$

となり，式 (7) を得る．ここで，自然数 m, n に対して

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{mn}$$

となることを用いた．

5) $g(x) = x(\pi - x)$ とおく．このとき，$g(0) = g(\pi) = 0$, $g''(x) = -2$ に注意して，部分積分を 2 回行うと

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\left[g(x)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} g'(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} g'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}\left[g'(x)\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} g''(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{n^3}\left\{1-(-1)^n\right\}$$

となる．よって，$b_n = \dfrac{4}{n^3\pi}\left\{1-(-1)^n\right\}$ であり，求める解は

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-kn^2t}\sin nx \\ &= \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-k(2m-1)^2t}}{(2m-1)^3}\sin(2m-1)x \quad (0\le x\le\pi,\ t\ge 0) \qquad (14.5) \end{aligned}$$

となる．最後に，温度分布 $u(x,t)$ が時刻 t とともに変化する様子を，横軸 x，縦軸 u のグラフにして図示しよう．図 14.1 は，無限級数 (14.5) の部分和

$$u_5(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{5}\frac{e^{-k(2m-1)^2t}}{(2m-1)^3}\sin(2m-1)x \qquad (14.6)$$

を $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ に対して図示したもの（ただし，$k=2$）であり，時間の経過とともに温度が下がっていく様子が分かる．

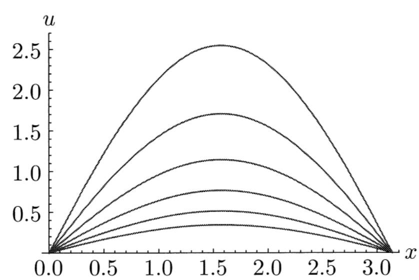


図 14.1

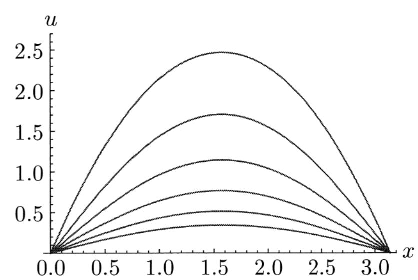


図 14.2

解答終わり

図 14.2 は (14.5) の初項のみからなる関数

$$u_1(x,t) = \frac{8}{\pi}e^{-kt}\sin x$$

を $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ に対して図示したもの (ただし, $k=2$) である．(14.5) を

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}e^{-kt}\left\{\sin x + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{e^{-k[(2m-1)^2-1]t}}{(2m-1)^3}\sin(2m-1)x\right\}$$

と書き直してみれば，時間がある程度経過した後は，$u(x,t)$ は初項の $u_1(x,t)$ で十分近似されることが分かる．5 つの項からなる部分和 (14.6) のグラフを手で書くのは難しいであろう．まして，無限級数 (14.5) のグラフを書くことはできない．そこで，試験の答案としては，$u_1(x,t)$ のグラフ（図 14.2）を描けばよいであろう．

14.2 フーリエ変換

前節では，フーリエ級数を用いて，熱方程式の初期・境界値問題の解を求めたが，次

に，フーリエ変換を用いて，熱方程式の初期値問題の**基本解**を求める問題を考えよう．

問題 14.3（大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻，平成 26 年度）関数 $f(x,t)$ に関する次の偏微分方程式を考える．

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \delta(x) \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geq 0) \tag{1}$$

ただし，$\delta(x)$ はデルタ関数を表す．以下の (a)〜(d) の設問に答えよ．

(a) 関数 $f(x,t)$ の変数 x に関するフーリエ変換 $F(u,t)$ を

$$F(u,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{-iux}\, dx$$

と定義する．$F(u,t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(b) 初期条件 $f(x,0) = \delta(x)$ をフーリエ変換し，$F(u,0)$ を求めよ．

(c) $F(u,t)$ が満たす微分方程式を解き，$F(u,t)$ を求めよ．

(d) (c) で求めた $F(u,t)$ を逆フーリエ変換することにより，式 (1) の解 $f(x,t)$ を求めよ．その際，次の積分公式を用いても良い．

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2y^2} \cos(by)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

ただし，$a > 0$, b は実数である．

解答例　**(a)** $F(u,t)$ を t で微分し，$f(x,t)$ の満たす偏微分方程式を用いると

$$\frac{\partial F}{\partial t}(u,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) e^{-iux}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) e^{-iux}\, dx$$

となる．ここで，部分積分を 2 回行うことにより

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) e^{-iux}\, dx &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) e^{-iux}\right]_{-\infty}^{\infty} + iu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) e^{-iux}\, dx \\ &= -u^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{-iux}\, dx\end{aligned}$$

となるので，$F(u,t)$ は微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t}(u,t) = -u^2 F(u,t)$$

を満たす．

(b) **デルタ関数**の定義より，任意の連続関数 $g(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)\, dx = g(0)$$

となるから

$$F(u,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,0) e^{-iux}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-iux}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(c) (a), (b) で求めた常微分方程式の初期値問題の解は

$$F(u,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2t}\quad(-\infty<u<\infty,\ t\geq 0)$$

で与えられる．

(d) (c) で求めた $F(u,t)$ を u に関して逆フーリエ変換すると

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,t)e^{ixu}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu^2}e^{ixu}\,du.$$

ここで，オイラーの公式と関数の偶奇性より

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu^2}e^{ixu}\,du=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu^2}\cos(xu)\,du+i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu^2}\sin(xu)\,du$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-tu^2}\cos(xu)\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

となる．ここで，$a=\sqrt{t}, b=x$ として，問題の最後にある積分公式を用いた．

以上により，求める解 $f(x,t)$ は

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\quad(-\infty<x<\infty,\ t>0)$$

となる．

解答終わり

最後に，3 次元空間におけるフーリエ変換の問題を考えよう．

問題 14.4 （京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻，平成 24 年度） m を正の実数，$\vec{r}$ を大きさが $r(\neq 0)$ の 3 次元の実ベクトルとして，

$$V(\vec{r})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\vec{p}^2+m^2}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

という 3 次元積分を実行し，$V(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi r}e^{-mr}$ となることを示せ．

解答例　ベクトル $\vec{p}$ の大きさを p とし，$\vec{r}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ とすると，被積分関数は

$$\frac{1}{\vec{p}^2+m^2}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}=\frac{e^{ipr\cos\theta}}{p^2+m^2}$$

となり，これは $\vec{r}$ を軸とする回転に関して対称である．よって

$$V(\vec{r})=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}dp\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{e^{ipr\cos\theta}}{p^2+m^2}p^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{p^2}{p^2+m^2}\left(\int_0^{\pi}e^{ipr\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\right)dp.$$

ここで，$s=-\cos\theta$ と変数変換すると

$$\int_0^{\pi}e^{ipr\cos\theta}\sin\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1}e^{-iprs}\,ds=\frac{2}{pr}\sin(rp)$$

だから

$$V(\vec{r})=\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{p\sin(rp)}{p^2+m^2}\,dp=\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+(mr)^2}\,dx.$$

最後の広義積分を計算するために，複素関数 $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+(mr)^2}$ を用いる．R を $R>mr$ なる実数とし，複素平面上の 4 点 R, $R+iR$, $-R+iR$, $-R$ を頂点とする長方形に対して，留数定理を用いると

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_0^R f(R+iy)\,idy-\int_{-R}^{R} f(x+iR)\,dx-\int_0^R f(-R+iy)\,idy$$
$$=2\pi i\lim_{z\to mri}(z-mri)f(z)=\pi ie^{-mr}$$

となる．ここで，$z=\pm R+iy\ (0\le y\le R)$ に対して

$$|z|\le|\pm R+iR|=\sqrt{2}R,\quad |z^2+(mr)^2|=|z+mri||z-mri|\ge R^2$$

だから

$$\left|\int_0^R f(\pm R+iy)\,idy\right|\le\int_0^R\frac{|\pm R+iy|}{|(\pm R+iy)^2+(mr)^2|}e^{-y}\,dy$$
$$\le\frac{\sqrt{2}}{R}\int_0^R e^{-y}\,dy=\frac{\sqrt{2}}{R}(1-e^{-R})\to 0\quad(R\to\infty).$$

また，$z=x+iR\ (-R\le x\le R)$ に対して

$$|z|\le|\pm R+iR|=\sqrt{2}R,\quad |z^2+(mr)^2|\ge R^2-(mr)^2$$

だから

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x+iR)\,dx\right|\le\int_{-R}^{R}\frac{|x+iR|}{|(x+iR)^2+(mr)^2|}e^{-R}\,dx$$
$$\le\frac{2\sqrt{2}\,R^2}{R^2-(mr)^2}e^{-R}\to 0\quad(R\to\infty)$$

となる．よって

$$\pi ie^{-mr}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=2i\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{x\sin x}{x^2+(mr)^2}\,dx$$

であり，

$$V(\vec{r})=\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+(mr)^2}\,dx=\frac{1}{4\pi r}e^{-mr}$$

となることが示された．

解答終わり

$V(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi r}e^{-mr}$ は**湯川ポテンシャル**と呼ばれる．問題 14.4 は，湯川ポテンシャルが $-\Delta+m^2$ の**基本解**であること，すなわち，$(-\Delta+m^2)V(\vec{r})=\delta(\vec{r})$（ここで，$\delta(\vec{r})$ は 3 次元のデルタ関数）の解であることを，フーリエ変換を用いて示す問題である．

次回は，第 7 回に続き，再び，線形代数に関する問題を取り上げる．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

特　集（2014 年 7 月号予告）

モノポールの謎

数理物理における尽きない魅力に迫る

特　集（2014 年 5 月号）

数理科学における代数的構造

多彩な代数学的アプローチを探る

編集後記

一口に空間概念といっても，様々であることが特集から見て取れたかと思います．記事で現れる空間概念はその分野の雰囲気ともつながるのかなとも思います．特集を読んで，どの空間が自分に合うか考えてみるのはいかがでしょうか．

ところで，先日久しぶりに遠出をした際に空間について感じたことがあります．それは，人の密度の違いで，形成される空間が違ってくるのだなということです．一般に大都市と呼ばれているところでも人の多い少ないで異なった空間が形成されるのではと感じました．　(R)

＊　＊

本特集では，数学と物理学における空間の概念が，お互いの発展にいかに寄与しているのかを紹介していただきました．

当初，物理の空間は具体的にイメージしやすく，その一方で数学の空間はやや抽象的でそれぞれ区別されるものなのかと考えていました．河野先生の解説に“数学と物理にまたがり躍動する”空間概念とあるように，空間は双方の土台を築くような存在であるように思います．空間概念に注目してみると，数学と物理のつながりがより見えてくるように感じました．　(T)

数　理　科　学　6月号

2014 年 6 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁